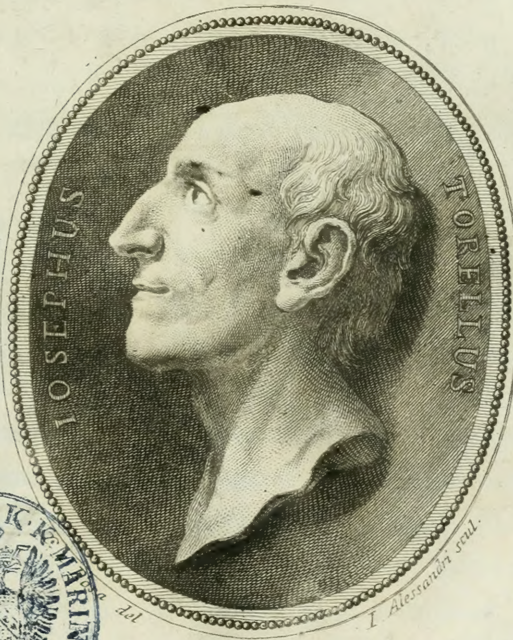


IOSEPHI TORELLI
VERONENSIS
ELEMENTORUM PROSPECTIVÆ
LIBRI II.
OPUS POSTHUMUM.

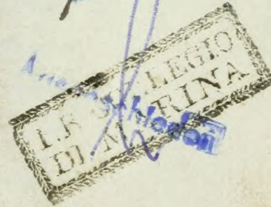
RECENSUIT ET EDIDIT

IOANNES BAPTISTA BERTOLINI

CENTURIO ARCHITECTUS AC IN MILITARI COLLEGIO
VERONENSI GRAPHIDOS PROFESSOR.







VERONÆ

EX OFFICINA MORONIANA

IOANNI BAPTISTÆ
COMITI DE ARCO
IN MANTUANO DUCATU POLITICES REGIÆQUE ACADEMIÆ PRÆFECTO CÆS. SACR. MAI. CAMERARIO &C. &C. &C.

HÆRES MARCI MORONI.



OSEPHI TORELLI *de Prospectivæ elementis, doctorum hominum sententia, pulcherrimos sane libros in lucem emittere, tibique, summe vir, nuncupare, æquissimum judicavi. Quidquid enim doctissimus homo ea de re, qua plurimæ adjuvantur artes, prudenter diligenterque conscripserat, id omne sibi communis hominum societas proprio jure vindicabat, jubebatque privatis educi parietibus; præsertim quod metuebat, ne qua oblivionis causa plerosque immortalium virorum libros periisse dolemus, eadem olim Torelli opus fuisse ablatum posteritas indignaretur. Quapropter, ut communi omnium utilita-*

ti consultum esset, id præstitum est, ut IOANNE BAPTISTA BERTOLINI *recensente, in Veronensi militaris institutionis Collegio de re graphica præceptore, Torelloque dum vivebat familiari, ea demum elementa publicis velut literarum monumentis commendarentur. Quod vero eadem tibi inscripta præcipue vellem, tua in doctrinis ratio, Torellique mens in causa fuerunt. Singularis etenim tibi est ad cognoscendum & procurandum omne disciplinarum genus prudentia, atque adeo voluntas, de quibus non id mihi sumam ut pluribus disseram; præsertim quod jam diu est, cum egregiis doctrinæ ingeniique documentis auctoritas hac in re tua confirmata est, ut non florentissimæ tantum cultis in Europæ regionibus Academiæ te socium cooptaverint, sed & ipsa Mantuana Academia, quod maximum est, parentem, fere dixerim, & moderatorem habeat. Quæ tua cum literis, studiosisque literarum conjunctio, magna mihi equidem causa fuit, ut in Torelliani operis editione jam statim a principio de te cogitaverim: ea tamen cum plerisque communis est; illa vero præcipua, quod Torellus ipse consilium ceperat, & cum amicis sæpius communicaverat, de suo tibi opere nuncupando, eam secutus rationem, ut quanti te faceret, & quam honestam familiaritatem sibi tuam esse existimaret, publico perennique monumento profiteretur. Quod cum ille facere judicasset, & fecisset quidem, nisi incœpta maturantem mors præoccupasset, perficiam ego, minime veritus, ne mortui familiaris officium me, veterem familiæ tuæ clientem, præstitisse, tibi gratissimum futurum sit. Quamvis enim antiquissima Majorum gloria, & quod magis commendandum est, parta tuis virtutibus dignitate plurimos in Italia præstes, concedas nemini; attamen Torellum, hominem egregiis naturæ artiumque*

bonis excultum pro tui animi æquitate, dum tecum una fuit, perinde ac tibi frater esset, amasti. Si quando enim Veronæ apud socerum tuum, primarium hominem, diversabaris, meminimus, te, singulis fere diebus, Torelli domum adire; in cujus sermone antemeridianas sæpe horas collocares, vespertinas sæpius traheres in noctem. Nunc autem, quod ille a te longissime atque e vita abiit; quæ præclarissimi ingenii reliqua sunt, pro tua in amicitiis constantia peramanter complecteris. Hæc tua cum Torello ratio est. Ego vero jam inde in vestram clientelam receptus sum, cum pater tuus, vir gravissimus, quidquid in universa latinorum carminum, quæ vester proavus Nicolaus Archius eleganter scripserat (quorum pleraque tertium pene in sæculum, ægre ferentibus literatis hominibus, premebantur) editione procuranda ad vestræ gentis celebritatem contuli, quod certe minimum fuit, perhumanissime accepit; ex quo intellexi, me si quid ejusmodi unquam expertus fuissem, rem vobis non injucundam, a me vero debitam facturum esse. Habes itaque, summe vir, cur id operis tibi maxime dicatum velim; qua in re si unum mihi ex voto successerit, ut voluntatem probes meam, amplissimum meis laboribus industriæque fructum omnino constitisse arbitrabor. Vale.

NOI RIFORMATORI

DELLO STUDIO DI PADOVA.

AVendo veduto per la Fede di Revisione, ed Approvazione del P. F. *Ercole Pio Pavoni* Inquisitor General del Santo Offizio di *Verona* nel Libro intitolato *Iosephi Torelli Veronensis Elementorum Prospectivæ Libri II. &c.* non vi esser cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Attestato del Segretario Nostro, niente contro Principi, e Buoni Costumi, concediamo Licenza agli *Eredi di Marco Moroni* Stampatori *di Verona* che possi essere stampato, osservando gli ordini in materia di Stampe, e presentando le solite Copie alle Pubbliche Librerie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 29. Novembre 1787.

(MARCO QUERINI Rif.

(ZACCARIA VALLERESO Rif.

(FRANCESCO PESARO Cav. Proc. Rif.

Registrato in Libro a Carte 241. al Num. 2252.

Giuseppe Gradenigo Segr.

IOSEPHI TORELLI

VERONENSIS

ELEMENTORUM PROSPECTIVÆ

LIBRI II.

SI tenebræ forent, oculuſque eſſet in tenebris conſtitutus, eorum, quæ ſunt, nihil omnino cerneretur. Quoniam igitur multa cernuntur, neceſſe eſt lucem eſſe, oculumque ipſum in luce verſari. Porro omne aſpectabile eatenus aſpectabile eſt, quatenus eſt ſolidum; ideſt extenſum in longum, latum, ac profundum. Quidquid vero hujuſmodi eſt figuram habet: omniſque figura aut uno, aut pluribus terminis concluditur; qui quidem termini, ſi ea ſolida eſt, ſunt ſuperficies. Itaque omne aſpectabile, dum apparet, ita eſt comparatum, ut ab una ſuperficie, aut pluribus ad oculum lucem tranſmittat. Hinc, cum ea lucis natura ſit, ut ſecundum rectam lineam feratur, oritur pyramis luminoſa, cujus ſunt baſis eæ, quas diximus, ſuperficies, vertex oculus ipſe. Quod ſi, manente pyramide, aſpectabile auferatur, tamen uſque apparebit, ejuſque ſpecies eadem erit, eodemque loco poſita. Neque enim ipſum per ſe, ſed per collectam in pyramide lucem cernitur. Quin immo ſi eadem pyramis ſuperficie aliqua ſecetur, auferaturque tum aſpectabile, tum ea pyramidis portio, quæ eſt ad eaſdem partes, ita ut portionis, quæ relinquitur, baſis ſit totius

pyramidis ſectio, quæ ab ea ſuperficie fit, idem prorſus eveniet; quippe oculus a luce eodem modo afficitur. Atque hæc ita vera ſunt, quocunque tandem intervallo aſpectabile, & oculus inter ſe diſtent; niſi quod, ſi ſatis illud fuerit longum, pyramis luminoſa intelligitur in ſolidum verti eandem habens baſim, ac latera inter ſe invicem parallela. Hiſce poſitis, ea diſciplina, quæ docet quomodo eæ, quas modo diximus, ſectiones inveniantur, PROSPECTIVA vocatur, cujus elementa hoc libello traduntur.



ELEMENTORUM PROSPECTIVÆ

LIBER I.

DEFINITIONES.

SI fuerit planum ſubjecto plano perpendiculare: dataque ſit poſitione & magnitudine ultra id planum figura aliqua ſolida; ducanturque ab ejus angulis rectæ lineæ priori illi plano perpendiculares; quæ oritur delineatio e communibus planorum ſectionibus tum perpendicularis, tum eorum, quæ a binis earum, quas diximus, perpendicularium utrinque terminantur, ita ut communis unaquæque ſectio oppoſito figuræ lateri reſpondeat; figuræ eiuſdem ORTHOGRAPHIA vocetur.

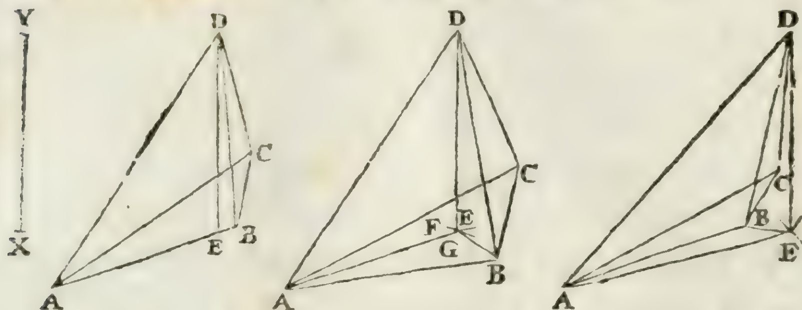
Si ab angulis figuræ, quam diximus, ducantur rectæ lineæ ſubjecto plano perpendiculares, puncta, in quæ eædem incidunt, angulorumque extrema, ſiqua ſunt in ſubjecto plano, vocentur figuræ VESTIGIUM.

Ipſæ vero perpendiculares, ANGULORUM ALTITUDINES.

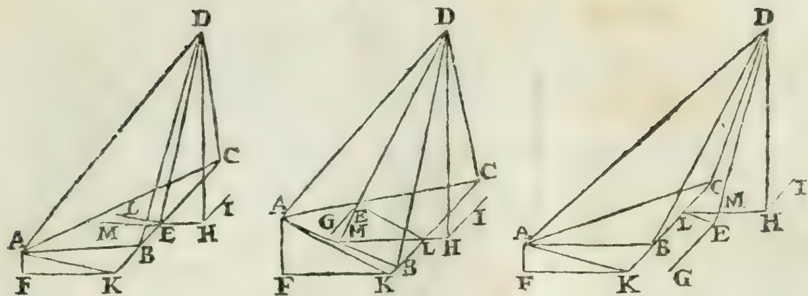
PROPOSITIO I.

Data poſitione & magnitudine pyramide triangularem baſim habente, ejus veſtigium, angulorumque altitudines invenire. Hujus autem pyramidis poſitio hujuſmodi eſſe poteſt, ut aut ejus baſis ſit in ſubjecto plano, aut unum latus, aut extremum unius anguli.

Data ſit poſitione & magnitudine pyramis ABCD, cujus baſis triangulum ABC, vertex D, altitudo XY. Oportet invenire veſtigium, & altitudines angulorum pyramidis ABCD.

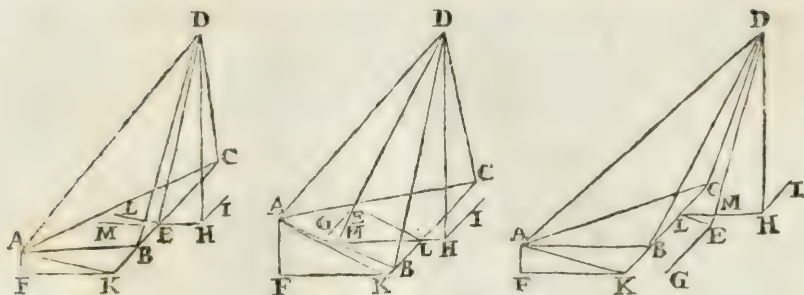


Sit primo baſis ABC in ſubjecto plano. Ducatur autem recta DE eidem plano perpendicularis; quæ quidem cadet aut in uno latere baſis ABC, ut AB, aut intra baſim ABC, aut extra. Cadat primo in AB, ut DE. Atque erit DE ipſi XY æqualis, ideoque magnitudine data. Data eſt autem magnitudine & AD. Quoniam igitur trianguli rectanguli ADE latera AD, DE circa unum acutorum angulorum ADE magnitudine data ſunt, triangulum
per cor. 43. dat. ADE ſpecie ac magnitudine datum eſt; ideoque AE magnitudine eſt data. Data eſt autem & poſitione; datumque unum ejus ex-
per 27. dat. tremum A. Igitur & alterum E datum eſt. Cadat modo recta DE intra baſim ABC, ut in E; junganturque rectæ AE, BE. Eodem modo demonſtrabitur rectas AE, BE magnitudine datas eſſe. Itaque deſcribantur centro A, atque intervallo AE,
per 6. def. dat. circulus EF; centroque B, atque intervallo BE, circulus EG. Uterque igitur circulus poſitione & magnitudine datus eſt; ideo-
per 25. dat. que punctum E eſt datum. Cadat denique recta DE extra baſim ABC, ut in E; junganturque rectæ AE, BE. Eodem modo demonſtrabitur punctum E datum eſſe. Quoniam igitur in tribus hiſce figuris puncta A, B, C, E data ſunt, dataque item per-
per def. pendicularis DE: & puncta quidem A, B, C, E vocantur pyramidis ABCD veſtigium, DE vero eſt anguli D altitudo; ideo inventa hæc ſunt, veſtigium pyramidis ABCD, & altitudo anguli D.



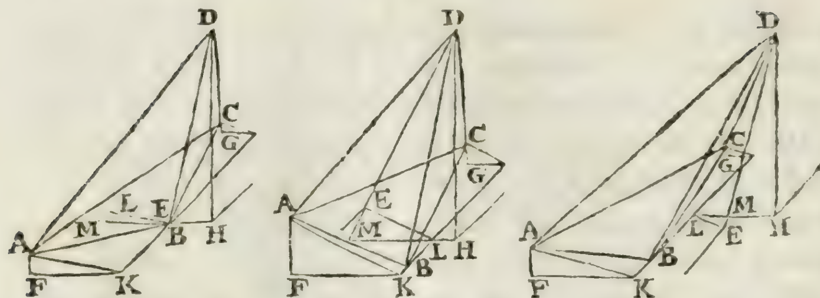
At vero basis ABC latus BC sit in subjecto plano. Ducatur autem a vertice D recta DE basi ABC perpendicularis; quæ quidem cadet aut in latere BC, aut intra basim ABC, aut extra, in eodem, in quo ipsa est, plano. Cadat primo in BC, ut DE. Ducantur autem a puncto E, quod quidem, ut supra, datum esse demonstrabitur, ipsi BC perpendiculares rectæ EL, EM, altera quidem in basi ABC, altera vero in plano subjecto. Atque erit angulus LEM inclinatio basis ABC ad planum subjectum, ideoque ob datam positione pyramidem ABCD, datus. Producatur ME ad H; ducaturque a vertice D recta DH ipsi MH perpendicularis. Et quoniam DE perpendicularis est basi ABC, angulus DEL rectus erit, ideoque datus. Datus est autem etiam angulus LEM. Igitur angulus, qui ex utrisque componitur, DEM est datus; ideoque & qui deinceps ponitur, DEH. Et quoniam in triangulo rectangulo DEH dati sunt anguli DEH, DHE, tertius quoque EDH erit datus. Triangulum igitur DEH specie datum est. Data est autem DE magnitudine. Igitur triangulum DEH specie & magnitudine est datum; ideoque datæ sunt magnitudine rectæ DH, & EH. Data est autem EH & positione, datumque unum ejus extremum E. Igitur & alterum H est datum. Ducatur modo per punctum H recta HI ipsi BC parallela. Et quoniam BE cum DE & EH, quæ in puncto E se se invicem secant, rectos angulos facit, ea utique plano, quod per ipsas agitur, ad rectos angulos erit. At vero HI ipsi BE est parallela. Igitur & HI eidem plano erit ad rectos angulos; ideoque DH cum HI rectos angulos faciet. At vero eadem DH rectos angulos facit etiam cum EH. Igitur DH rectos angulos facit

per 3. dat.
per 4. dat.
per 40. dat.
Per cor. 40. dat.
per 27. dat.



cum plano, quod agitur per EH, & HI. Hoc autem planum planum est subjectum. Igitur DH ad rectos angulos est plano subjecto, hoc est anguli D altitudo. Ducatur ab angulo A ipsi BC perpendicularis recta AK. Et quoniam a dato puncto A ad BC positione datam ducta est AK datum angulum faciens AKC, per 30. dat. data utique est positione AK. Igitur punctum K datum est; & per 25. & 26. dat. quæ positione data est AK, ea data etiam est magnitudine. Ducatur a puncto K in subjecto plano ipsi BC ad rectos angulos recta KF; & ab angulo A ipsi KF perpendicularis AF. Demonstrabitur eodem modo, quo supra, punctum F datum esse, datamque item magnitudine rectam AF, eamque subjecto plano esse ad rectos angulos, hoc est anguli A altitudinem. Cadat modo recta DE in basi ABC, ut in E; quod quidem, ut supra, datum esse demonstrabitur: ducaturque ab E ipsi BC perpendicularis recta EL; datumque erit punctum L, ideoque data ipsa EL positione & magnitudine. Producatur DE ad punctum M in subjecto plano; junctaque ML, ducatur per E recta EG ipsi BL parallela. Et quoniam EG parallela est ipsi BL, rectusque angulus BLE, rectus utique erit etiam angulus LEG. At vero angulus GEM est rectus. Igitur EG duabus LE, EM in puncto E se se invicem secantibus ad rectos angulos insistit; ideoque ad rectos angulos est etiam plano, quod per ipsas agitur. Igitur & quæ ipsi EG parallela est BL, eidem plano ad rectos angulos erit, ideoque rectos angulos faciet cum LE & LM. Angulus igitur ELM est inclinatio basis ABC ad planum subjectum; ideoque ob datam positione pyramidem ABCD, datus est. Et quoniam in triangulo rectangulo LEM dati sunt anguli ELM, LEM, dataque est ma-

gnitudine EL, demonſtrabitur, ut ſupra, rectas LM, ME magnitudine datas eſſe. Producatur LM ad H; ducaturque a vertice D ipſi MH perpendicularis recta DH. Erunt utique triangula DMH, LME inter ſe invicem ſimilia: ac propterea ut LM ad ME, ita ſe habebit DM ad MH; & ut LM ad LE, ita DM ad DH. Data eſt autem ratio tum LM ad ME, tum LM ad LE; quippe per 1. dat.
harum unaquæque eſt data. Data eſt igitur & ratio tum DM ad MH, tum DM ad DH. At vero DM eſt data, utpote quæ com- per 3. dat.
ponitur ex datis duabus DE, & EM. Igitur data eſt utraque MH, & DH magnitudine. Data eſt autem MH & poſitione, datumque unum ejus extremum M. Igitur & alterum H eſt datum. Quod ſi per punctum H recta ducatur HI ipſi BC parallela, demonſtrabitur, ut ſupra, ipſam DH plano ſubjecto eſſe ad rectos angulos, hoc eſt anguli D altitudinem. Ducatur ab angulo A ipſi BC perpendicularis recta AK; & reliqua fiant, ut ſupra. Eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur punctum F in ſubjecto plano datum eſſe, datamque item anguli A altitudinem AF. Cadat denique recta DE extra baſim ABC in eodem plano, in quo eſt ipſa ABC, ut in E; quod quidem, ut ſupra, datum eſſe demonſtrabitur. Ducatur autem ab E ipſi BC perpendicularis recta EL; jungaturque a puncto L ad M, in quo DE ſecat planum ſubjectum, recta LM; eademque producta ad H, ducatur ab angulo D ipſi LH perpendicularis DH. Eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur, data quidem DM utpote reliqua, ſi a data DE au- per 4. dat.
feratur data EM, punctum H in ſubjecto plano datum eſſe, datamque item anguli D altitudinem DH. Quod ſi ab angulo A ducatur AK ipſi BC perpendicularis; & reliqua fiant, ut ſupra, demonſtrabitur item eodem modo, quo ſupra, datum eſſe punctum F in ſubjecto plano, datamque ſimul anguli A altitudinem AF. Quoniam igitur in tribus hiſce figuris puncta B, C, H, F data ſunt, datæque item perpendiculares DH, & AF; & puncta quidem B, C, H, F vocantur pyramidis ABCD veſtigium; DH vero, & AF angulorum D, & A altitudines; ideo inventa hæc ſunt, veſtigium pyramidis ABCD, & altitudines angulorum D, & A.



Sit denique pyramidis ABCD angulus B in ſubjecto plano. Ducatur autem a vertice D recta DE baſi ABC perpendicularis; quæ quidem cadet aut in angulo B, aut intra baſim ABC, aut extra, in eodem, in quo ipſa eſt, plano. Cadat primo in B. Sit autem BK communis planorum ſectio tum ſubjecti, tum ejus, in quo eſt baſis ABC. Et punctum quidem H, in quod recta incidit DH ſubjecto plano perpendicularis, demonſtrabitur, ut ſupra, datum eſſe. Ducatur modo ab angulo A ipſi BK perpendicularis AK. Et quoniam in triangulo rectangulo ABK angulus rectus AKB datus eſt, datuſque item, ob pyramidem ABCD poſitione datam,
per 40. dat. angulus ABK, datus utique erit & tertius BAK. Triangulum igitur ABK ſpecie datum eſt. Data eſt autem AB magnitudine. Igitur
per cor. 40. dat. triangulum ABK ſpecie & magnitudine eſt datum; ideoque datæ ſunt magnitudine rectæ BK & AK. At vero BK data eſt etiam
per 27. dat. poſitione, datumque unum ejus extremum B. Igitur datum eſt etiam alterum K. Ducatur a puncto K in ſubjecto plano ipſi BK ad rectos angulos recta KF; & ab angulo A ipſi KF perpendicularis recta AF. Eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur punctum F datum eſſe, datamque item rectam AF, eamque ſubjecto plano eſſe perpendicularem, ideſt anguli A altitudinem. Eadem ratio eſt puncti G, atque altitudinis CG. Quod ſi recta DE cadat intra baſim ABC, aut extra, in eodem plano, in quo eſt ipſa ABC, deſcriptis figuris, demonſtrabitur item, ut ſupra in ſecunda poſitione, data eſſe puncta H, F, G, atque altitudines DH, AF, CG; ut nihil attineat eadem repetere. Quoniam igitur in tribus hiſce figuris, & quæ ſequuntur; ideo inventa hæc ſunt, veſtigium pyramidis ABCD, atque altitudines angulorum D, A, C. Quod oportebat facere.

COROL-

COROLLARIUM.

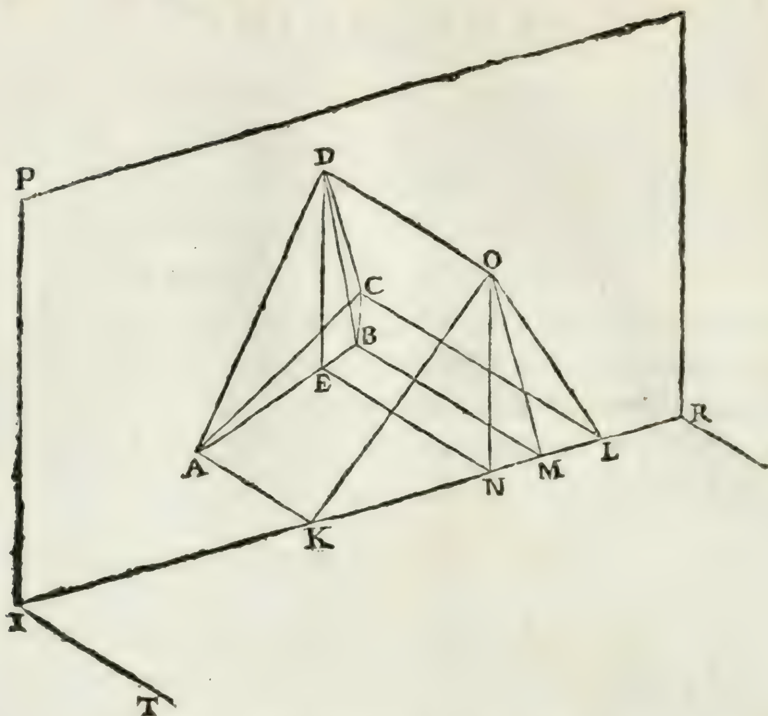
Si ab angulo B recta ducatur perpendicularis plano ei, quod ſubjicitur, parallelo; producanturque ad idem planum rectæ AF, CG, DH; erunt utique puncta, in quæ eædem incidunt, ſimiliter poſita ac puncta B, F, G, H: quæ vero rectæ productæ fuerint, æquales erunt rectis compoſitis ex ipſis AF, CG, DH, rectaque a puncto B perpendiculari; quæ quidem eſt planorum, quæ diximus, diſtantia, ideoque data. Ex quo patet quomodo pyramidis ABCD, ſi ea fuerit in ſublimi, veſtigium, angulorumque altitudines inveniantur.

PROPOSITIO II.

Data poſitione & magnitudine ultra planum ſubjecto plano perpendiculare pyramide triangularem baſim habente, ejuſdem orthographiam conficere.

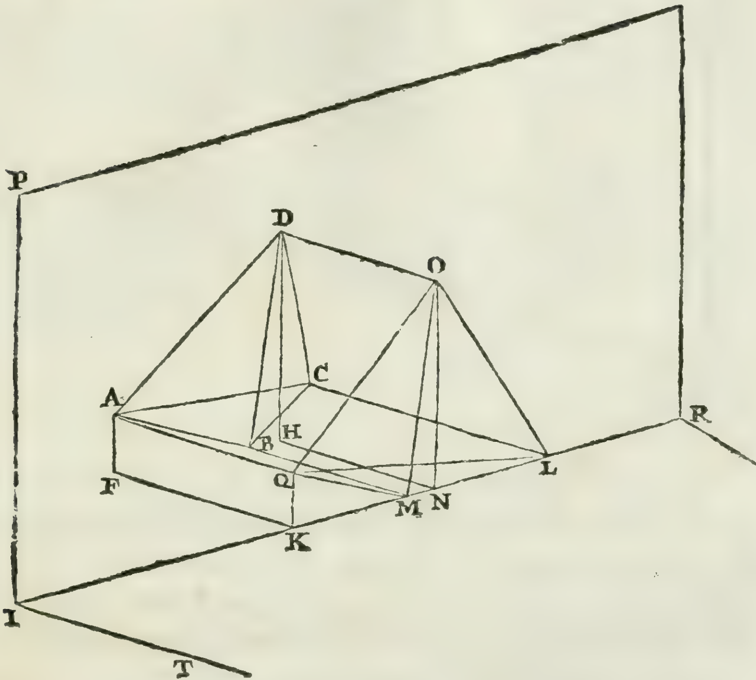
Data ſit poſitione & magnitudine ultra planum PR perpendiculare plano RT pyramis ABCD, cujus ſit baſis triangulum ABC, vertex D. Oportet conficere orthographiam pyramidis ABCD.

Sit primo baſis ABC in plano RT. Inveniatur veſtigium pyramidis ABCD, & altitudo anguli D; ideſt puncta A, B, C, E, per 1. prop.
rectaque DE. Ducatur autem a puncto E perpendicularis ipſi IR, communi ſectioni planorum PR, RT, recta EN. Et quoniam a dato puncto E ad datam poſitione rectam IR ducta eſt recta EN in dato angulo ENI, ea utique erit poſitione data. per 30. dat.
Punctum igitur N datum eſt. Ducatur ab N ipſi IR ad rectos per 25. dat.
angulos in plano PR recta NO ipſi DE æqualis. Et quoniam ad datam poſitione rectam IR, datumque in ea punctum N recta ducta eſt NO rectum angulum faciens INO, ea utique erit poſitione data. Atqui data eadem eſt etiam magnitudine, datumque per 29. dat.
unum ejus extremum N. Igitur & alterum O datum eſt. Du- per 27. dat.

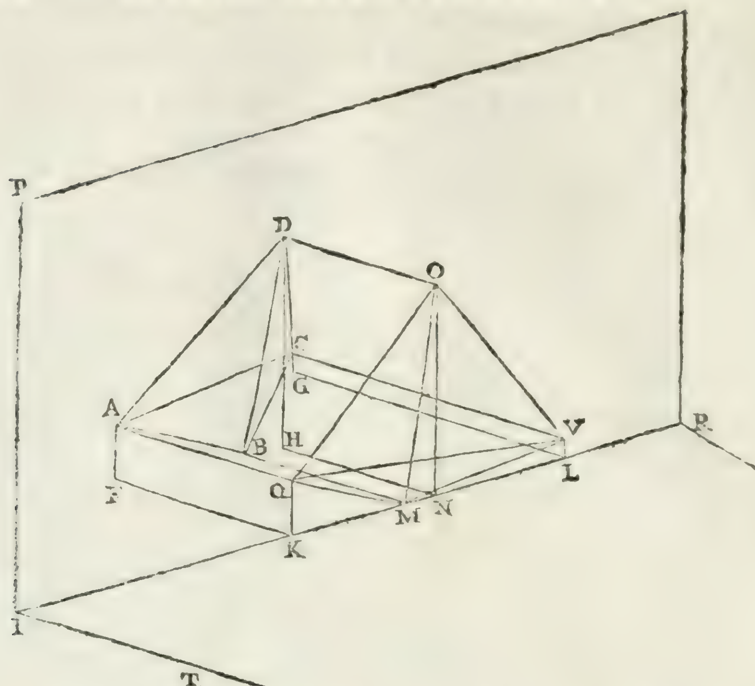


catur a puncto D ad O recta DO. Quoniam igitur planum PR rectum est ad planum TR; ductaque est in plano PR communi planorum sectioni IR ad rectos angulos recta ON, hæc utique ad rectos angulos erit plano RT. At vero recta DE eidem plano RT est ad rectos angulos. Rectæ igitur DE, ON sunt parallelæ. Sunt autem etiam æquales. Igitur EN parallela est ipsi DO. At vero EN perpendicularis est plano PR. Igitur etiam DO eidem plano est perpendicularis. Ducantur modo a punctis A, B, C ipsi IR perpendiculares rectæ AK, BM, CL. Hæ utique perpendiculares erunt plano PR; punctaque K, M, L erunt data. Itaque si rectæ jungantur OK, OM, OL, erunt KM, ML, KL, OK, OM, OL communes sectiones planorum tum PR, tum AM, BL, AL, AO, BO, CO: quorum primum terminatur a perpendicularibus AK, BM; secundum a perpendicularibus BM, CL; tertium a perpendicularibus AK, CL; quartum a perpendicularibus DO, AK; quintum a perpendicularibus DO, BM; sex-

tum a perpendicularibus DO, CL. Ac pyramidis ABCD lateri AB respondet sectio KM; lateri BC sectio ML; lateri AC sectio KL; lateri AD sectio KO; lateri BD sectio MO; lateri CD sectio LO. Quæ autem oritur delineatio ex hujusmodi sectionibus, figuræ orthographia vocatur. Igitur delineatio KMLO est orthographia pyramidis ABCD. per 1. def.



At vero basis ABC latus BC sit in plano RT. Inveniantur vestigium pyramidis ABCD, & altitudines angulorum D, A; idest puncta F, B, C, H, rectæque AF, DH; describaturque figura. Eodem, quo supra, modo demonstrabitur delineationem QMLO esse orthographiam pyramidis ABCD.



Sit denique pyramidis ABCD angulus B in plano RT. Inveniantur vestigium pyramidis ABCD, & altitudines angulorum A, C, D; ideſt puncta F, B, G, H, rectæque AF, CG, DH; deſcribaturque figura. Eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur delineationem QMVO eſſe orthographiam pyramidis ABCD.

Data igitur poſitione & magnitudine; & quæ ſequuntur. Quod oportebat facere.

DEFINITIO.

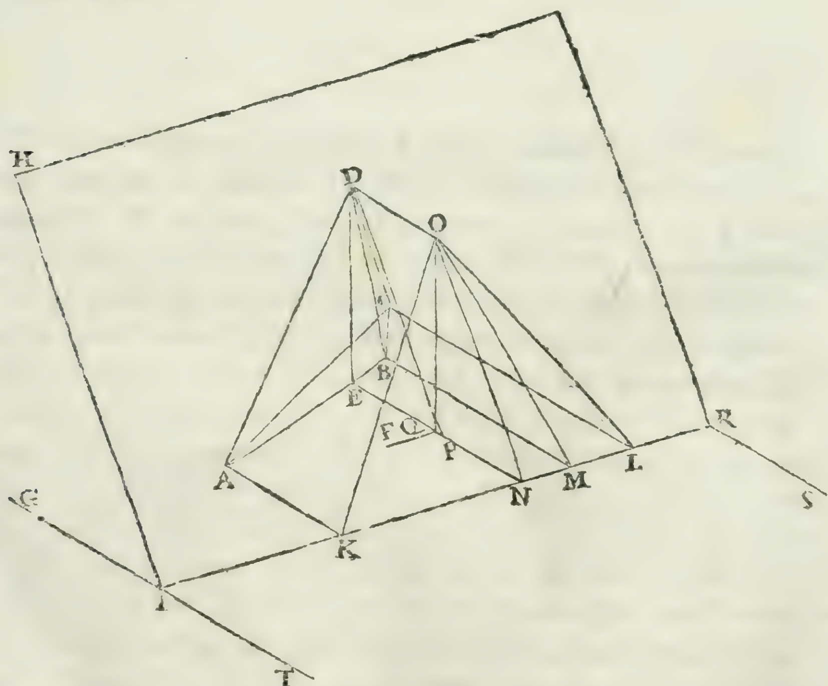
Si fuerit planum ad ſubjectum planum inclinatum: dataque ſit poſitione & magnitudine ultra id planum figura aliqua ſolida; ducanturque ab ejus angulis rectæ lineæ rectæ cuidam parallelæ, quæ in ſubjecto plano cum communi planorum ſectione æquales angulos facit; quæ oritur delineatio e communibus planorum ſectionibus tum inclinati, tum eorum, quæ a binis earum, quas diximus,

parallelarum utrinque terminantur, ita ut communis unaquæque ſectio oppoſito figuræ lateri reſpondeat; figuræ ejuſdem ORTHOGRAPHIA PROCUMBENS vocetur.

PROPOSITIO III.

Data poſitione & magnitudine ultra planum ad ſubjectum planum inclinatum pyramide triangularem baſim habente, ejuſdem orthographiam procumbentem conficere.

Data ſit poſitione & magnitudine ultra planum HR inclinatum ad planum IS pyramis ABCD, cujus ſit baſis triangulum ABC, vertex D. Oportet conficere orthographiam procumbentem pyramidis ABCD.



Sit primo baſis ABC in plano IS. Inveniantur veſtigium pyramidis ABCD, & altitudo anguli D; ideſt puncta A, B, C, E, per 1.Prop.

rectaque DE. Ducatur autem a puncto E parallela rectæ IT, quæ cum communi planorum HR, IS sectione IR æquales angulos facit, recta EN. Datum utique erit punctum N. Ducatur item ab angulo D ad EN recta DP in angulo DPE æquali planorum HR, IS inclinationi HIG. Et quoniam in triangulo rectangulo DPE dati sunt anguli DEP, DPE, dataque item recta DE, ideo recta DP erit data. Ducatur modo a puncto N ipsi IR ad rectos angulos in plano HR recta NO ipsi DP æqualis; ducaturque a puncto O, quod quidem est datum, ipsi EN perpendicularis recta OQ; & a puncto Q QF ipsi IR parallela; jungaturque recta DO. Quoniam igitur IN ad rectos angulos est plano ONQ, erit ipsa etiam QF ad rectos angulos eidem plano. Recta igitur OQ cum QF rectos angulos facit. Facit autem rectos angulos etiam cum EN. Igitur OQ ad rectos angulos est plano IS. At vero etiam DE eidem plano IS est ad rectos angulos. Rectæ igitur OQ & DE sunt parallelæ, ideoque in uno eodemque plano. At vero NO in eodem est plano atque OQ;

per 30. dat.

per cor. 40. dat.

per 29. dat.

& DP in eodem atque DE. Igitur in uno eodemque plano sunt NO & DP. Aequalis est autem angulus ONQ angulo DPE. Igitur ON & DP sunt parallelæ. At vero sunt etiam æquales. Igitur DO parallela est ipsi PN. Parallela est autem PN ipsi IT. Parallela est igitur & DO ipsi IT. Ducantur modo a punctis A, B, C ipsi IT parallelæ rectæ AK, BM, CL; eruntque puncta K, M, L data. Itaque si rectæ jungantur OK, OM, OL, erunt KM, ML, KL, OK, OM, OL communes sectiones planorum tum HR, tum AM, BL, AL, AO, BO, CO: quorum primum terminatur a parallelis AK, BM; & cætera, ut in secunda Propositione. Quæ autem oritur delineatio ex hujusmodi sectionibus, figuræ orthographia procumbens vocatur. Igitur delineatio KMLO orthographia procumbens est pyramidis ABCD. Quod si pyramidis ABCD sit in plano IS latus BC, aut angulus B, inventis vestigiis, & angulorum altitudinibus, descriptisque figuris, demonstratio eodem modo conficitur.

per 28., & 25. dat.

Data igitur positione & magnitudine; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

DEFINITIO.

Si fuerit planum subjecto plano perpendiculare: dataque sit positione & magnitudine ultra id planum figura aliqua solida; ducanturque ab ejus angulis rectæ lineæ rectæ cuidam parallelæ, quæ cum communi planorum sectione in subjecto plano inæquales angulos facit, aut quoscunque in sublimi; quæ oritur delineatio e communibus planorum sectionibus tum perpendicularis, tum eorum, quæ a binis earum, quas diximus, parallelarum utrinque terminantur, ita ut communis unaquæque sectio opposito figuræ lateri respondeat; figuræ ejusdem SCENOGRAPHIA PARALLELA vocetur.

PROPOSITIO IV.

Data positione & magnitudine ultra planum subjecto plano perpendiculare pyramide triangularem basim habente, ejusdem scenographiam parallelam conficere.

Data sit positione & magnitudine ultra planum HR perpendiculare plano IS pyramis ABCD, cujus sit basis triangulum ABC, vertex D. Oportet conficere scenographiam parallelam pyramidis ABCD.

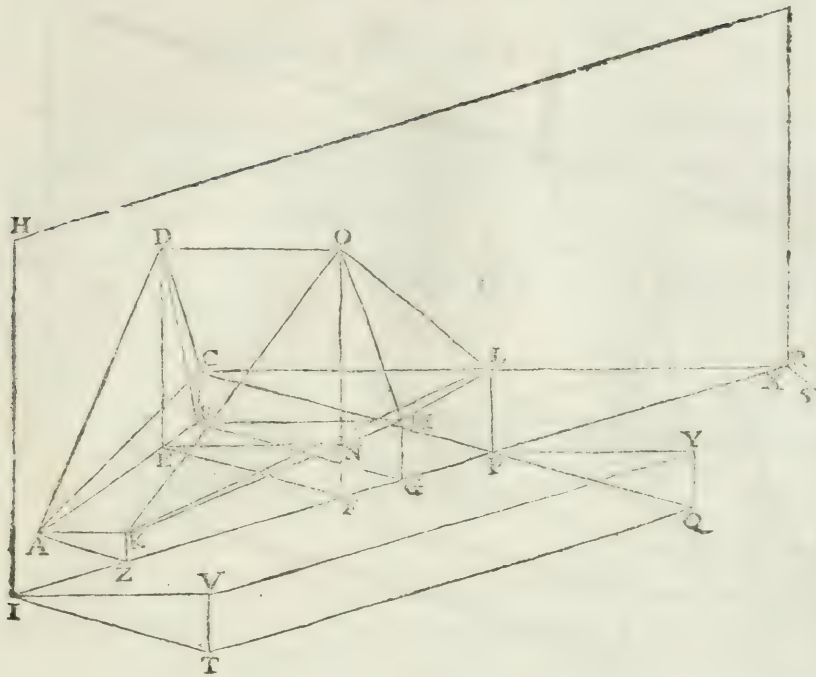
Sit primo basis ABC in plano IS. Inveniantur vestigium pyramidis ABCD, & altitudo anguli D; idest puncta A, B, C, E, rectaque DE. Erit autem recta linea, quæ cum communi planorum HR, IS sectione IR angulos facit, aut in subjecto plano, aut in sublimi. Sit primo in subjecto plano, cujusmodi est IT inæquales angulos faciens cum IR; ducanturque a punctis A, E, B, C eidem IT parallelæ rectæ AZ, EF, BG, CP; eademque fiant quæ in Propositione secunda. Sane parallela pyramidis ABCD scenographia haud secus conficietur, atque ejusdem orthographia confecta sit. At vero recta, quam modo diximus, sit in sublimi, cujusmodi est IV quoscunque angulos faciens cum IR, æquales nempe, sive inæquales. Ducatur autem a puncto V plano IS perpendicularis recta VT, jungaturque IT. Erit utique angulus acutus TIV rectæ IV ad planum IS inclinatio, ideoque datus; rectaque IT secundum ipsam IV sive æquales, sive inæquales angulos faciet cum IR. Ducatur a puncto C ipsi IT parallela recta CP; & a dato puncto P ad rectos angulos ipsi PR in plano HR recta PL, quæ itidem erit ad rectos angulos ipsi PC; deinde sumpta in PR PX æquali ipsi CP, ducatur a puncto X item dato ad angulum ipsi TIV æqualem recta XL ipsam PL secans in puncto L. Atque erit datum id punctum. Producatur modo recta CP ad punctum Q, ut sit PQ ipsi IT æqualis, ducaturque a Q plano IS perpendicularis æqualisque ipsi TV recta QY, rectæque jungantur PY, YV, TQ. Et quoniam TV, YQ æquales sunt ac parallelæ, ideo QT æqualis est ac parallela ipsi VY.

per 1.Prop.

per 25. dat.

per 27. dat.

per 25. dat.



VY. Aequalis eſt autem ac parallela TQ ipſi IP. Aequalis eſt igitur ac parallela etiam VY ipſi IP; ac propterea PY parallela eſt ipſi IV. Jungatur a puncto C ad L recta CL. Quoniam igitur triangula TIV, QPY ſimilia ſunt, erit angulus QPY æqualis angulo TIV: eademque ratione quoniam ſimilia ſunt triangula XPL, CPL, erit angulus LXP æqualis angulo PCL. Aequalis eſt autem angulus LXP angulo TIV. Aequalis eſt igitur etiam angulus QPY angulo PCL. At vero rectæ PY, CL in eodem ſunt plano. Igitur CL parallela eſt ipſi PY. Parallela eſt autem PY ipſi IV. Parallela eſt igitur etiam CL ipſi IV. Ducantur modo a punctis A, E, B ipſi IT parallelæ rectæ AZ, EF, BG, eademque fiant quæ ſupra. Eodem modo demonſtrabitur puncta K, N, M data eſſe; & quæ rectæ junguntur AK, EN, BM, eas eſſe ipſi IV parallelas. Jam vero producatur FN ad O, ut ſit NO ipſi DE æqualis; jungaturque a puncto D ad O, quod per 27. dat.
quidem eſt datum, DO. Quoniam igitur DE, NO ſunt æqua-

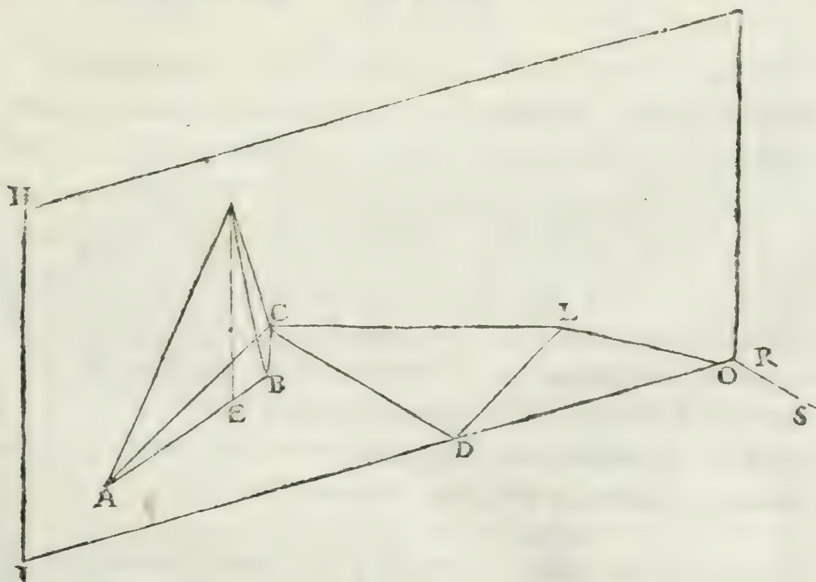
les ac parallelæ, erit DO parallela ipsi EN, ideoque ipsi etiam IV. Itaque si rectæ jungantur KM, ML, KL, itemque KO, MO, LO, erunt KM, ML, KL, KO, MO, LO communes sectiones planorum tum HR, tum AM, BL, AL, AO, BO, CO: quorum primum terminatur a parallelis AK, BM; & cætera, ut in secunda Propositione. Quæ autem oritur delineatio ex hujusmodi sectionibus, figuræ scenographia parallela vocatur. Igitur delineatio KMLO scenographia parallela est pyramidis ABCD. Quod si pyramidis ABCD sit in plano IS latus BC, aut angulus B, inventis vestigiis & angulorum altitudinibus, descriptisque figuris, demonstratio eodem modo conficitur.

Data igitur positione & magnitudine; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO V.

Si a puncto quovis C vestigii A, B, C, E ad communem planorum HR, IS sectionem IR ducatur recta CD ad datum angulum CDI; sumptaque in DR ipsi CD æquali DO, jungantur ad datum punctum L, in quod parallela incidit CL, rectæ DL, LO; anguli LDO, LOD erunt uterque dati.

Quoniam enim a dato puncto C ad datam positione IR ducta est CD datum angulum faciens CDI, ea utique data erit positione; ideoque punctum D erit datum. At vero DO data est po- per 30. dat. per 25. dat.



sitione & magnitudine. Punctum igitur O datum est. Datum est autem punctum L. Utraque igitur DL, OL positione & magnitudine data est. Igitur triangulum DOL specie datum est; ac propterea dati singuli ejus anguli. Dati sunt igitur anguli LDO, LOD. Quod si ab alio quovis vestigii puncto recta ducatur ad sectionem IR ipsi CD parallela, sumptaque in IR recta eidem per 27. dat. per 26. dat. per 39. dat. per 3. def. dat.

æquali, & ad easdem partes, ad quas sumpta fuit DO, jungantur ab ejus extremis ad id punctum plani HR, in quod recta incidit parallela ipsi CL, duæ rectæ; quos hæ angulos faciunt cum IR, hi erunt æquales angulis LDO, DOL, alter alteri. Hoc autem infra demonstrabitur.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, in quarta Propositione puncta K, N, M delineationis KMLO aliter inveniri posse atque ista inventa sint.

LEMMA.

Si duo plana se se invicem secent; ducanturque a duobus punctis in eorum altero sumptis ad communem planorum sectionem duæ rectæ parallelæ, aliæque duæ ad planum alterum itidem parallelæ; sumantur autem in communi planorum sectione a punctis, in quibus priores parallelæ eandem secant, duæ rectæ iis, quas modo diximus, parallelis æquales & ad easdem partes, & jungantur ab utriusque extremis ad ea puncta, in quæ secundæ parallelæ incidunt, duæ rectæ, binæ ad unum; anguli, quos istæ faciunt cum communi planorum sectione, æquales erunt, quo sunt ordine deinceps positi.

Secent se se invicem plana HR, IS; sumptisque in plano IS punctis A, C, ducantur ab iisdem ad IR communem planorum HR, IS sectionem parallelæ AQ, CD, & ad planum HR parallelæ item AK, CL; sumatur autem a puncto Q ipsi AQ æqualis recta QY, æqualisque ipsi CD a puncto D recta DO, & jungantur a punctis Q, Y ad K rectæ QK, YK, & a punctis D, O ad L rectæ DL, OL. Dico æquales esse angulum KQY angulo LDO, & angulum QYK angulo DOL.

Quoniam enim duæ rectæ AQ, AK parallelæ sunt duabus rectis CD, CL, quæ plana per ipsas aguntur AQK, CDL erunt parallela. Et quoniam duo plana parallela AQK, CDL secantur a plano HR, communes ipsorum sectiones QK, DL sunt parallelæ. Angulus igitur KQY æqualis est angulo LDO. Rursus quoniam parallelæ sunt AQ ipsi CD, & AK ipsi CL, erit angulus QAK æqualis angulo DCL. Eadem ratione quoniam parallelæ sunt AQ ipsi CD, & QK ipsi DL, angulus AQK æqualis est angulo CDL. Triangulum igitur AQK simile est triangulo CDL: ac propterea ut AQ ad QK, ita se habet CD ad DL. At vero æqualis est AQ ipsi QY, & CD ipsi DO. Ut igitur QY ad QK, ita se habet DO ad DL. Aequalis est autem angulus KQY angulo LDO. Igitur triangulum KQY simile est triangulo LDO; ac propterea angulus QYK æqualis angulo DOL.

Si duo igitur plana se se invicem secent; & quæ sequuntur. Quod oportebat demonstrare.

DEFINITIO.

Si fuerit planum ad subjectum planum inclinatum: dataque sit positione & magnitudine ultra id planum figura aliqua solida; ducanturque ab ejus angulis rectæ lineæ rectæ cuidam parallelæ, quæ cum communi planorum sectione in subjecto plano inæquales angulos facit, aut quoscunque in sublimi; quæ oritur delineatio e communibus planorum sectionibus tum inclinati, tum eorum, quæ a binis earum, quas diximus, parallelarum utrinque terminantur, ita ut communis unaquæque sectio opposito figuræ lateri respondeat, figuræ ejusdem SCENOGRAPHIA PARALLELA PROCUMBENS vocetur.

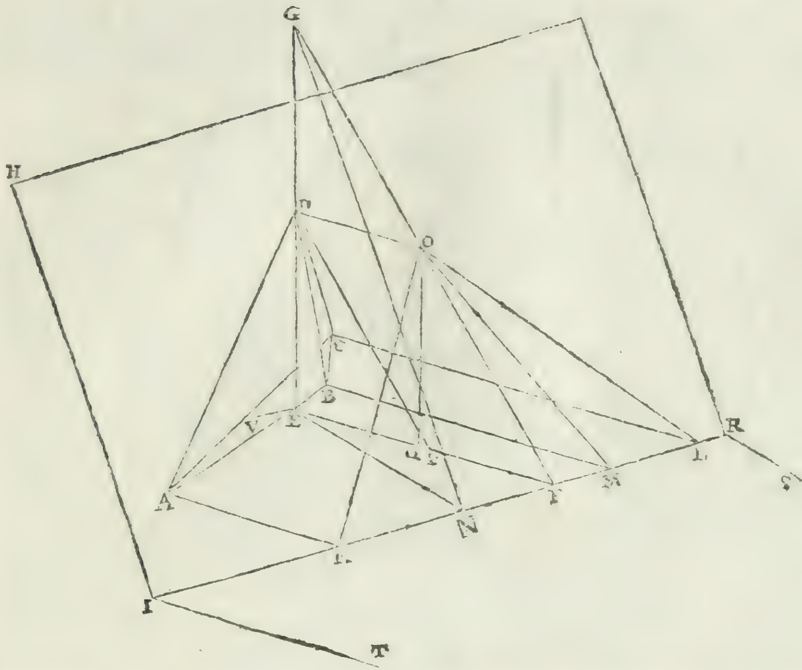
PROPOSITIO VI.

Data positione & magnitudine ultra planum ad subjectum planum inclinatum pyramide triangularem basim habente, ejusdem scenographiam parallelam procumbentemque conficere.

Data sit positione & magnitudine ultra planum HR inclinatum ad planum IS pyramis ABCD, cujus sit basis triangulum ABC, vertex D. Oportet conficere scenographiam parallelam procumbentem pyramidis ABCD.

Sit primo basis ABC in plano IS. Inveniatur vestigium pyramidis ABCD, & altitudo anguli D; idest puncta A, B, C, E, rectaque DE. Erit autem recta linea, quæ cum communi planorum HR, IS sectione IR angulos facit, aut in subjecto plano, aut in sublimi. Sit primo in subjecto plano, cujusmodi est IT inæquales angulos faciens cum IR. Ducantur autem a puncto E ad IR rectæ EF, EN altera parallela ipsi IT, altera ad rectos angulos ipsi IR; atque DE producta plano HR occurrat

per 1.prop.



in puncto G, junganturque ab eodem ad data puncta F, N, rectæ GF, GN ; & ducatur a puncto E recta EV parallela ipsi IR. Et quoniam GE recta est ad planum IS, ea utique cum EV rectos angulos facit. Facit autem etiam EN rectos angulos cum EV. Igitur EV ad rectos angulos est plano NEG. At vero NI parallela est ipsi EV. Igitur ipsa etiam NI eidem plano NEG ad rectos est angulos ; ideoque rectos angulos facit cum utraque EN & NG. Angulus igitur ENG est plani HR ad planum IS inclinatio, ideoque datus. Quoniam igitur in triangulo NEG dati sunt anguli NEG, ENG, datus erit & tertius NGE; ideoque triangulum NEG datum erit specie. Data est autem magnitudine recta EN. Igitur triangulum NEG datum est specie & magnitudine ; ideoque data magnitudine utraque EG, NG. Et quoniam triangulum GNF habet angulum GNF datum, datasque circa illum magnitudine GN, NF, erit triangulum GNF datum specie & magnitudine ; ideoque datus uterque angulus NGF, NFG, itemque magnitudine recta FG. At vero data est positio-

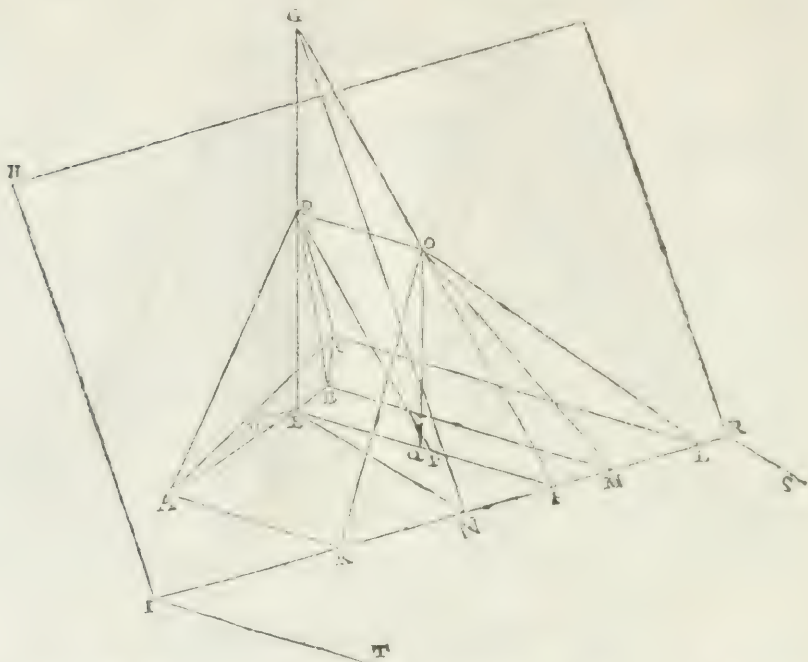
per 30. & 25. dat.

per 40 dat.

Per cor. 40. dat.

per 30, 25, & 26. dat.

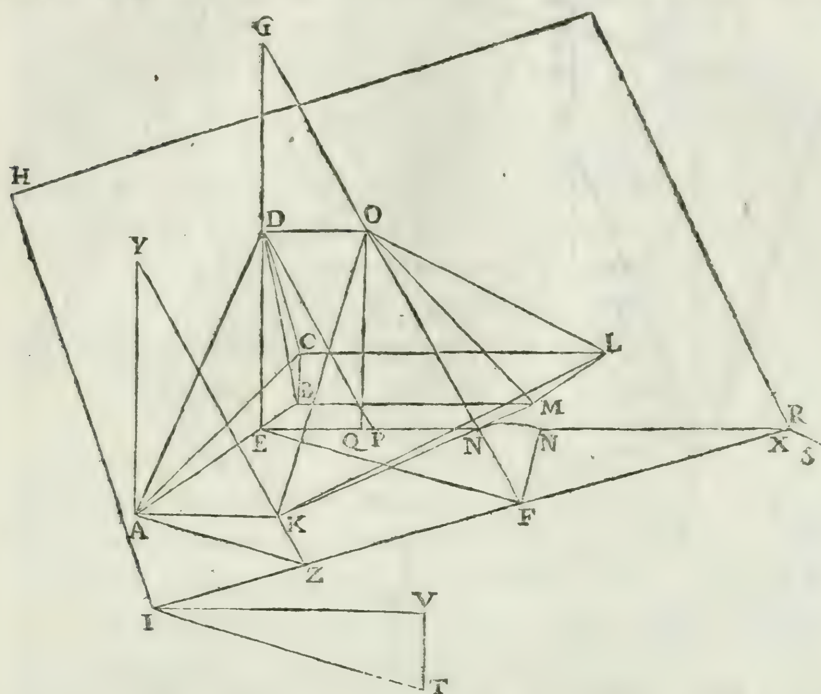
per cor. 41. dat.



ne recta IR, datumque in ea punctum F. Recta igitur FG po-
per 29. dat. sitione quoque est data. Quoniam vero in triangulo GEF datæ
per cor. 42. dat. sunt magnitudine rectæ GE, EF, FG, erit triangulum GEF datum specie & magnitudine, ideoque datus angulus EFG. Ducatur modo a puncto D recta DP ipsi GF parallela. Erit utique angulus DPE æqualis angulo EFG, ideoque datus. Et quoniam in triangulo DEP dati sunt anguli DEP, DPE, datus erit & ter-
per 40. dat. tius PDE; ideoque triangulum DEP datum specie. Data est au-
per cor. 40. dat. tem magnitudine recta DE. Igitur triangulum DEP datum est specie & magnitudine; ideoque DP magnitudine data. Sumatur
per 29. dat. FO in FG ipsi DP æqualis; ducaturque a puncto O dato recta OQ ipsi DE parallela, & jungatur DO. Quoniam igitur in triangulis DPE, OFQ angulus DPE æqualis est angulo OFQ, & angulus DEP æqualis angulo OQF, æqualisque DP ipsi OF, erit utique etiam DE æqualis ipsi OQ. Est autem DE ipsi OQ etiam parallela. Igitur DO parallela est ipsi EQ. Parallela est autem LQ ipsi IT. Parallela est igitur DO eidem IT. Ducantur modo

a punctis

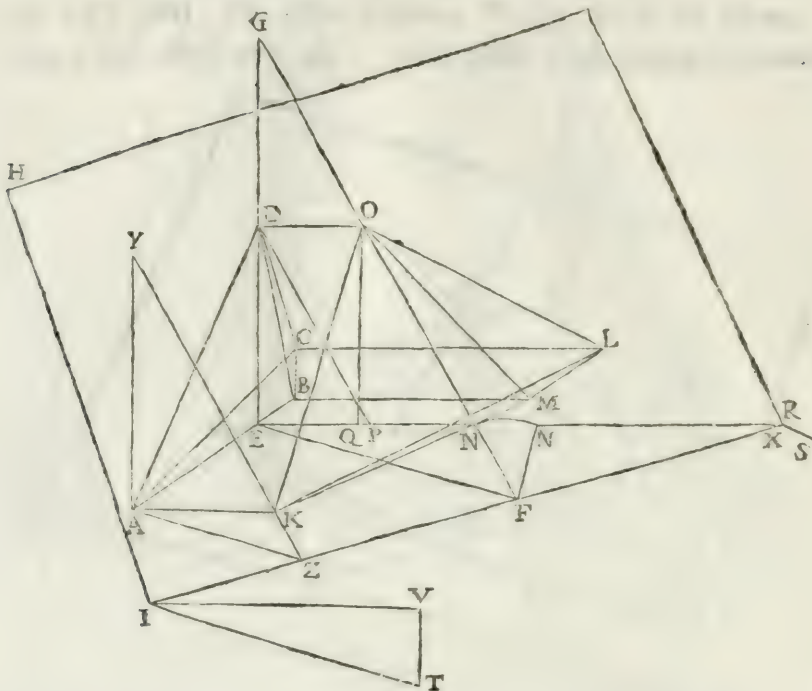
a punctis A, B, C ipsi IT parallelæ rectæ AK, BM, CL; rectæque jungantur KO, MO, LO. At vero recta linea, quæ



cum communi planorum HR, IS sectione IR angulos facit, sit in sublimi, cujusmodi est IV quoscunque angulos faciens cum IR, æquales nempe, sive inæquales. Ducatur autem a puncto V plano IS perpendicularis recta VT; jungaturque IT. Erit utique angulus acutus TIV rectæ IV ad planum IS inclinatio, ideoque datus; rectaque IT secundum ipsam IV sive æquales, sive inæquales angulos faciet cum IR. Ducatur a puncto E ipsi IT parallela recta EF; jungaturque a puncto G, in quod DE ad planum HR producta incidit, ad datum punctum F recta GF. Demonstrabitur, ut supra, angulum EFG esse datum. Constituatur modo ad rectam lineam FR, datumque in ipsa punctum F in plano HR angulus RFN angulo EFG æqualis, sumptaque in FR FX æquali ipsi EF, ducatur item a dato puncto X ad angulum æqualem ipsi TIV recta XN. Erunt utique FN, XN utraque positione

per. 30. & 25. dat.

per 29. dat.



per 25. dat. datæ; ideoque datum erit punctum N. Datum eſt autem & punctum F. Recta igitur FN magnitudine eſt data. Itaque centro F, atque intervallo FN, deſcribatur circulus NN. Erit utique circulus NN poſitione datus. Data eſt autem poſitione etiam recta FG. Igitur punctum N eſt datum. Ducatur a puncto E ad N recta EN. Demonſtrabitur, ut in quarta Propoſitione, angulum FEN æqualem eſſe angulo TIV, ideoque datum, rectamque EN ipſi IV eſſe parallelam. Et quoniam dati ſunt anguli EFN, FEN, dati erunt utique etiam anguli ENG, NED. Itaque ducatur a puncto D recta DP ipſi GN parallela. Erit utique angulus DPE æqualis angulo ENG, ideoque datus. Demonſtrabitur autem, ut ſupra, rectam DP magnitudine datam eſſe. Itaque ſi ſumatur in NG NO ipſi DP æqualis, ducaturque a
per 27. dat. puncto O dato recta OQ ipſi DE parallela, & jungatur DO, demonſtrabitur, ut ſupra, rectam DO ipſi EN, ideoque ipſi IV parallelam eſſe. Ducatur a puncto A ipſi IT parallela recta AZ;

& ab eodem puncto plano IS ad rectos angulos recta AY, quæ plano HR occurrat in puncto Y; jungaturque a puncto Y ad datum Z recta YZ. Quoniam igitur duæ rectæ ZA, AY parallelæ sunt duabus rectis FE, EG, quæ plana per ipsas aguntur ZAY, FEG, ea erunt parallela. Et quoniam duo plana parallela ZAY, FEG secantur a plano HR, communes ipsorum sectiones ZY, FG sunt parallelæ. Igitur angulus RZY æqualis est angulo RFG. Rursus quoniam duæ rectæ AZ, ZY parallelæ sunt duabus rectis EF, FG, erit angulus AZY æqualis angulo EFG. Itaque si quæ ad punctum F præparata sunt, eadem præparentur ad punctum Z, demonstrabitur, ut supra, punctum K datum esse, rectamque AK rectæ IV esse parallelam. Idem vero dicendum de punctis M, L, rectisque BM, CL. Itaque rectæ jungantur KM, ML, KL, itemque KO, MO, LO. Atque erunt in utraque figura KM, ML, KL, KO, MO, LO communes sectiones planorum tum HR, tum AM, BL, AL, AO, BO, CO: quorum primum terminatur a parallelis AK, BM; & cætera, ut in secunda Propositione. Quæ autem oritur delineatio ex hujusmodi sectionibus, figuræ scenographia parallela procumbens vocatur. Igitur delineatio KMLO scenographia parallela procumbens est pyramidis ABCD. Quod si pyramidis ABCD sit in plano IS sive latus BC, sive angulus B, inventis vestigiis, & angulorum altitudinibus, descriptisque figuris, demonstratio eodem modo conficitur.

per 30. & 25. dat.

Data igitur positione & magnitudine, & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

Illud vero manifestum est, puncta K, M, L delineationis KMLO haud secus in hac Propositione inveniri posse, atque in quarta, per quintam Propositionem, inventa sint.

DEFINITIO.

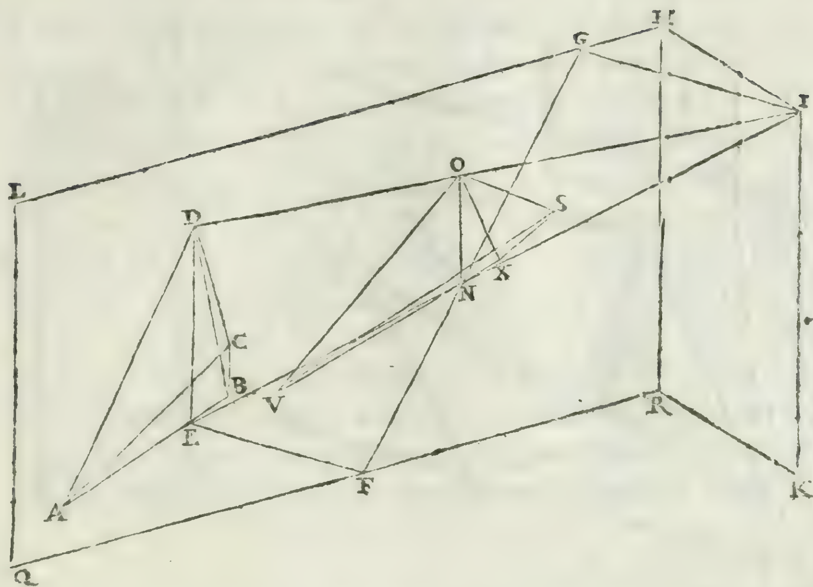
Si fuerit planum ſubjecto plano perpendiculare; dataque ſit poſitione & magnitudine ultra id planum figura aliqua ſolida; ducanturque ab ejus angulis ad punctum citra idem planum datum rectæ lineæ; quæ oritur delineatio e communibus ſectionibus plani perpendicularis, ac triangulorum, quorum unumquodque baſim habet unum figuræ latus, verticem punctum datum, figuræ ejuſdem SCENOGRAPHIA CONCURRENS vocetur.

PROPOSITIO VII.

Data poſitione & magnitudine ultra planum ſubjecto plano perpendiculare pyramide triangularem baſim habente, datoque citra id planum puncto aliquo, ejuſdem ſcenographiam concurrentem conficere.

Data ſit poſitione & magnitudine ultra planum LR perpendiculare plano QK pyramis ABCD, cujus ſit baſis triangulum ABC, vertex D. Datum autem ſit citra planum LR punctum I. Oportet conficere ſcenographiam concurrentem pyramidis ABCD.

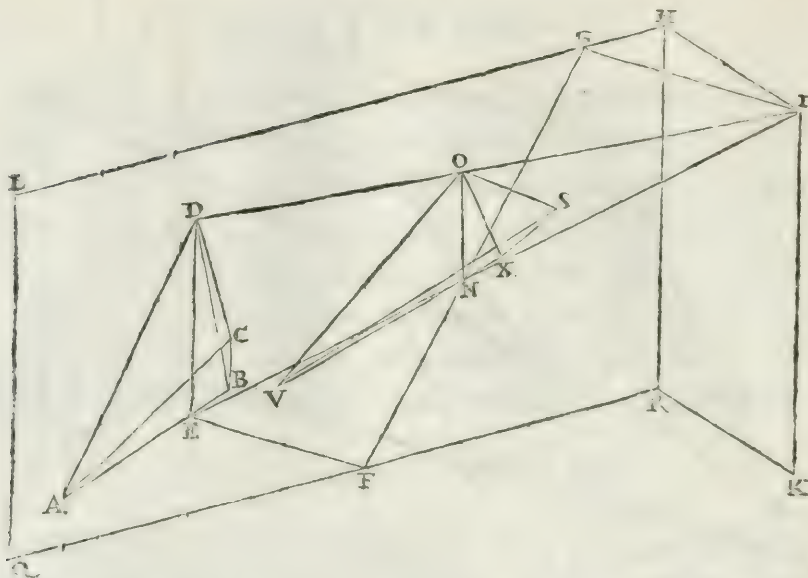
Sit primo baſis ABC in plano QK. Inveniantur veſtigium py-
per 1. prop. ramidis ABCD, & altitudo anguli D; ideſt puncta A, B, C,
E, rectaque DE. Ducatur autem a puncto I plano QK perpen-
per 30. 25. & 29. dat. dicularis recta IK. Erit utique datum punctum K. Datum eſt
per 26. dat. autem & punctum I. Igitur IK data eſt poſitione & magnitudi-
ne. Ducatur item a puncto K, communi planorum LR, QK
ſectioni QR perpendicularis, recta KR; & in plano LR a da-
per 30. & 25. dat. to puncto R, ipſi QR ad rectos angulos, rectæque IK æqualis,
per 29. dat. RH. Atque erit RH data poſitione, & magnitudine; ideoque
per 27. dat. datum punctum H. Jungatur HI. Et quoniam IK, HR uni ei-
demque plano QK ad rectos ſunt angulos, eæ utique ſunt inter
ſe invicem parallelæ. At vero eædem ſunt æquales. Igitur pa-



rallelæ & æquales ſunt etiam RK, HI. Data eſt autem magnitudine RK. Data eſt igitur magnitudine & HI. Ducatur a puncto H ipſi QR parallela recta HL. Et quoniam duæ IH, HL parallelæ ſunt duabus KR, RQ, erit angulus IHL æqualis angulo KRQ, ideoque datus. Ducatur a puncto I ad HL recta IG ad angulum IGH dato cuivis æqualem. Et quoniam in triangulo IGH dati ſunt anguli IHG, IGH, dataque magnitudine etiam IH, ideo triangulum IGH ſpecie & magnitudine datum eſt. Igitur utraque IG, GH magnitudine data eſt. Data eſt autem HG etiam poſitione, datumque unum ejus extremum H. Igitur etiam alterum G eſt datum. Ducatur modo a puncto E ad QR recta EF ad angulum EFQ ipſi IGH æqualem, ut ſit EF ipſi IG parallela; (hoc enim fieri poteſt, quoniam plana QK, IHG ſunt parallela) & per EF, IG agatur planum EFIG. Erit utique communis planorum LR, EFIG ſectio FG recta linea. Jungatur EI. Et quoniam rectæ FG, EI ſunt in uno eodemque plano EFIG, ſecabunt ſe ſe invicem in puncto aliquo N. Jam vero in triangulis IGN, NFE cum angulus IGN æqualis ſit angulo NFE, angulusque ING æqualis angulo ENF, erunt triangula

per cor. 40. dat.

per 27. dat.



IGN, NFE æquiangula. Ut igitur IG ad EF, ita se habet GN ad NF. Et componendo, ut recta composita ex IG & EF ad EF, ita se habet recta composita ex GN & NF, hoc est GF, ad NF. At vero ratio, quam habet recta composita ex IG & EF ad EF, est data. Igitur & ratio data est, quam GF habet ad NF. Data est autem magnitudine GF. Data est igitur magnitudine & NF. Atqui data eadem est & positione, datumque unum ejus extremum F. Igitur & alterum N est datum. Jungatur modo recta DI, eaque plano LR occurrat in puncto O; jungaturque NO. Quoniam igitur DE plano QK ad rectos angulos est, ideo & planum, quod per ipsam agitur, DEI eidem plano ad rectos angulos erit. At vero etiam planum LR plano QK ad rectos est angulos. Igitur communis planorum LR, DEI sectio NO, si producatur, ad rectos angulos erit eidem plano QK; ideoque positione data. Et quoniam ED, NO sunt parallelæ, ut EI ad IN, ita se habebit ED ad NO. Ut autem EI ad IN, ita se habet FG ad GN. Ut igitur FG ad GN, ita se habet ED ad NO. At vero ratio, quam FG habet ad GN, est data. Igitur & ratio data est, quam ED habet ad NO.

per 3. & 1. dat.

per 2. dat.

per 27. dat.

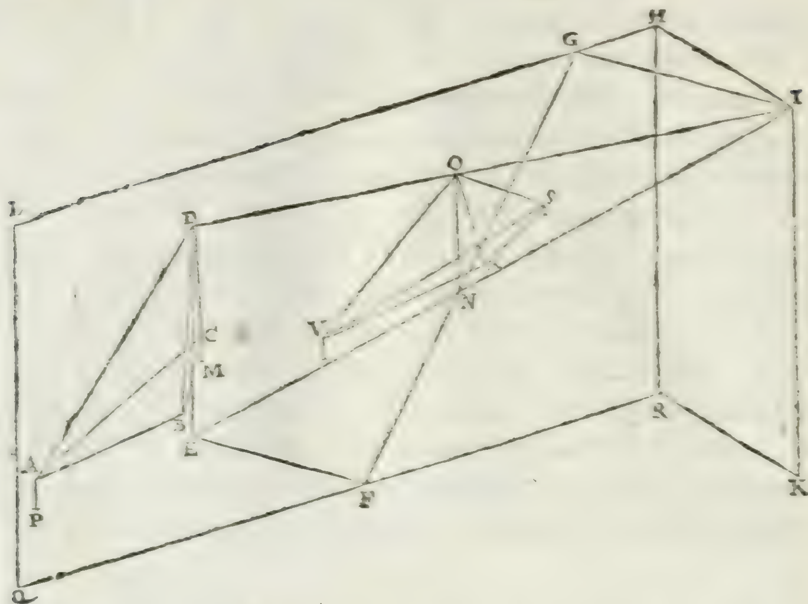
per 5. dat.

Data eſt autem magnitudine ED. Data eſt igitur magnitudine & NO. Atqui data eadem eſt & poſitione; datumque unum ejus extremum N. Igitur & alterum extremum O eſt datum. Vocetur autem NO SCENOGRAPHICA anguli D ALTITUDO. Inveniantur puncta V, X, S haud ſecus ac punctum N inventum ſit; rectæque jungantur VX, XS, VS, itemque OV, OX, OS. Erunt utique VX, XS, VS, OV, OX, OS communes ſectiones plani LR, ac triangulorum IAB, IBC, IAC, IAD, IBD, ICD. Ac pyramidis ABCD latus AB eſt baſis trianguli IAB; latus BC baſis trianguli IBC; latus AC baſis trianguli IAC; latus AD baſis trianguli IAD; latus BD baſis trianguli IBD; latus CD baſis trianguli ICD. Quæ autem oritur delineatio ex hujuſmodi ſectionibus, figuræ ſcenographia concurrens vocatur. Igitur delineatio VXSO ſcenographia concurrens eſt pyramidis ABCD.

per 2. dat.

per 27. dat.

At vero baſis ABC latus BC ſit in plano QK. Inveniantur veſtigium pyramidis ABCD, & altitudines angulorum D, A; ideſt puncta B, C, P, E, rectæque AP, DE; deſcribaturque figura. Eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur, delineationem VXSO eſſe ſcenographiam concurrentem pyramidis ABCD.



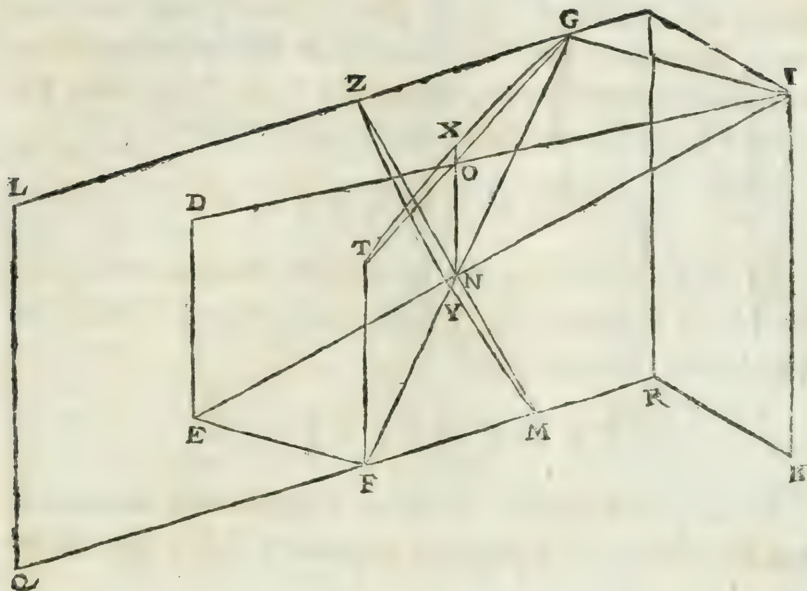
Sit denique pyramidis ABCD angulus B in plano QK. Inveniantur vestigium pyramidis ABCD, & altitudines angulorum A, C, D; idest puncta B, P, M, E, rectæque AP, CM, DE; describaturque figura. Eodem, quo supra, modo demonstrabitur delineationem VXSO esse scenographiam concurrentem pyramidis ABCD.

Data igitur positione & magnitudine; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO VIII.

Si in prima figura superioris Propositionis sumatur in FR, communi planorum LR, QK sectione, recta FM ipsi EF æqualis, & in GL recta GZ æqualis ipsi GI, jungaturque recta MZ, ea per punctum N transibit. Item si a puncto F ducatur recta FT æqualis ipsi ED, eademque ipsi NO parallela, jungaturque recta TG, ea transibit per punctum O.

Si



Si enim recta MZ per punctum N non transit, ea secet, ut in apposita figura, rectam FG in puncto Y. Erunt utique triangula GZY, YMF æquiangula. Ut igitur GZ ad FM, ita se habet GY ad YF. Et componendo, ut recta composita ex GZ & FM ad FM, ita recta composita ex GY & YF, hoc est GF, ad FY. Ut autem recta composita ex GZ & FM ad FM, ita se habet recta composita ex IG & EF ad EF: quoniam GZ æqualis est ipsi IG, & FM æqualis ipsi EF; demonstratumque est rectam compositam ex IG & EF ita se habere ad EF, ut GF ad FN. Igitur ut GF ad FY, ita se habet GF ad FN; ideoque FY æqualis est ipsi FN, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur recta MZ secat rectam GF in puncto Y. Sed neque in alio quovis puncto, præterquam in N. Igitur recta MZ transit per punctum N. Jam vero neque recta TG transeat per punctum O; sed secet rectam NO, si oportuerit, productam in puncto aliquo X. Quoniam igitur FT, NX sunt parallelæ, ut FG ad GN, ita se habebit FT ad NX. Ut autem FG ad GN, ita se habet etiam FT ad NO; quoniam FT ipsi ED est æqualis. Igitur ut FT ad NX, ita se habet FT ad NO;

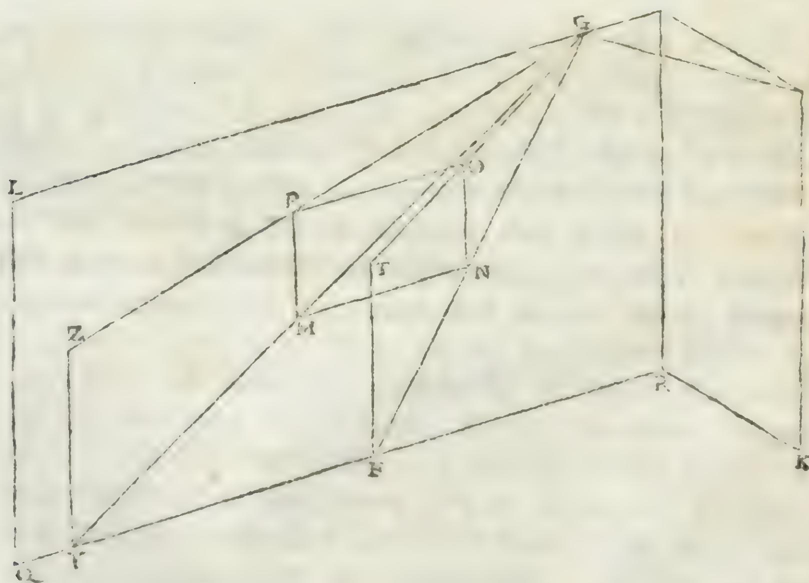
ideoque NX æqualis eſt ipſi NO, major minori; quod fieri non poteſt. Non igitur recta TG ſecat rectam NO in puncto X. Sed neque in alio quovis puncto, præterquam in O. Igitur recta TG tranſit per punctum O. Quod oportebat demonſtrare.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifeſtum eſt in ſeptima Propoſitione puncta N, O delineationis VXSO aliter inveniri poſſe, atque in illa inventa ſint.

PROPOSITIO IX.

Si in prima figura ſeptimæ Propoſitionis ducatur a puncto aliquo Y communis planorum LR, QK ſectio-



nis QF recta YZ ipſi FT æqualis & parallela, junganturque ab ejus extremis Y, Z rectæ YG, ZG; tum vero a dato puncto N ipſi QF parallela ducatur NM, & a

puncto M MP parallela ipsi NO; erit MP data positione & magnitudine, ipsique NO æqualis.

Quoniam enim rectæ YG extrema Y, G positione data sunt, erit utique YG data positione & magnitudine. Rursus quoniam per datum punctum N secundum datam positione QF ducta est NM. data utique erit NM positione. Datum est igitur punctum M. Eodem modo demonstrabitur etiam punctum P datum esse. Igitur MP data est positione & magnitudine. Jam vero quoniam in triangulo YFG YF, MN sunt parallelæ, ut FG ad GN, ita se habebit YG ad GM. Ut autem FG ad GN, ita se habet FT ad NO; & ut YG ad GM, ita YZ ad MP. Igitur ut FT ad NO, ita se habet YZ ad MP. Æqualis est autem FT ipsi YZ. Æqualis est igitur etiam NO ipsi MP. Quod oportebat demonstrare.

per 26. dat.

per 28. dat.

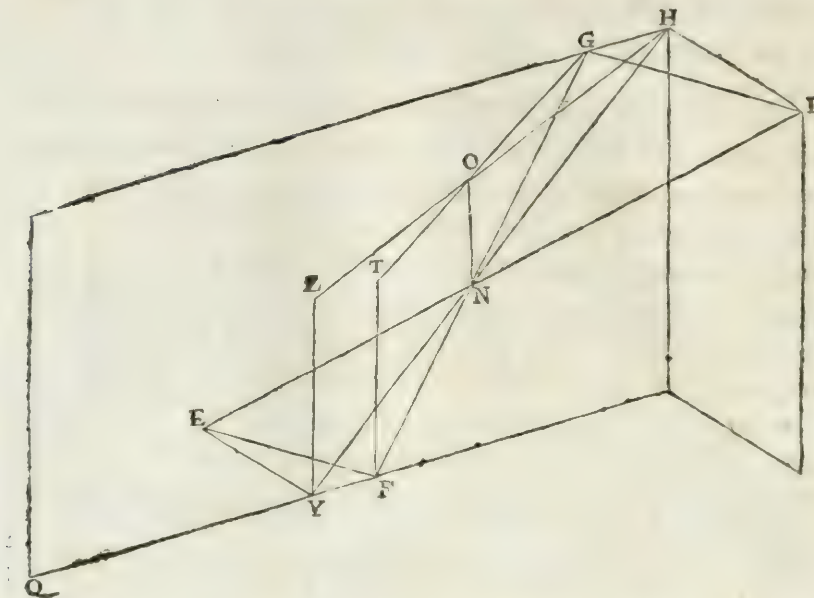
per 25. dat.

COROLLARIUM.

Quod si recta jungatur PO, ea erit ipsi MN parallela. Ex quo manifestum est in septima Propositione punctum O, atque ideo rectam NO delineationis VXSO aliter posse inveniri, atque ibi, & in Corollario octavæ Propositionis inventa sit; ita nempe ut omnes altitudines, cujusmodi est YZ, si plures sint, in una eademque recta positione data sumantur.

PROPOSITIO X.

Si in prima figura septimæ Propositionis a puncto I ducatur utcunque ad GH recta IH, & a puncto E ad QF EY angulum faciens EYF æqualem angulo IHG; quæ rectæ junguntur HN, YN, in directo sibi invicem erunt. Quod si a puncto Y ipsi FT parallela ducatur YZ, jungaturque recta HO, ea si producatur, abscindet YZ æqualem ipsi FT.



Quoniam enim parallelæ ſunt EF ipſi IG, & EY ipſi IH, erit utique angulus FEY æqualis angulo GIH. Æqualis eſt autem etiam angulus EYF angulo IHG. Igitur triangulum EYF æquiangulum eſt triangulo IHG; ac propterea ut EY ad EF, ita ſe habet IH ad IG. At vero EF ad EN ita ſe habet, ut IG ad IN. Igitur ex æqua eademque ordinata proportione, ut EY ad EN, ita ſe habet IH ad IN. Æqualis eſt autem angulus NEY angulo NIH. Igitur triangulum EYN triangulo IHN eſt æquiangulum; ideoque angulus ENY æqualis angulo INH. Erit igitur YN in directo ipſi NH. Rurſus quoniam æquiangula ſunt triangula FNY, GNH, ut FN ad NG, ita ſe habebit YN ad NH. Et componendo, ut FG ad GN, ita YH ad HN. Ut autem FG ad GN, ita ſe habet FT ad NO; & ut YH ad HN, ita YZ ad NO. Igitur ut FT ad NO, ita ſe habet YZ ad NO; ideoque æqualis eſt TF ipſi YZ. Quod oportebat demonſtrare.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifeſtum eſt punctum N quæri poſſe ſive per rectas IG, EF, ſive per IH, EY; punctumque O poſſe item quæri ſive per rectas FT, TG, ſive per YZ, ZH: utrovis autem modo quærantur, eodem loco poſita inventum iri. Quod vero de puncto N dictum eſt, idem dicendum de punctis V, X, S. Quocirca delineatio VXSO in utroque caſu eadem erit, eodemque loco poſita.

DEFINITIO.

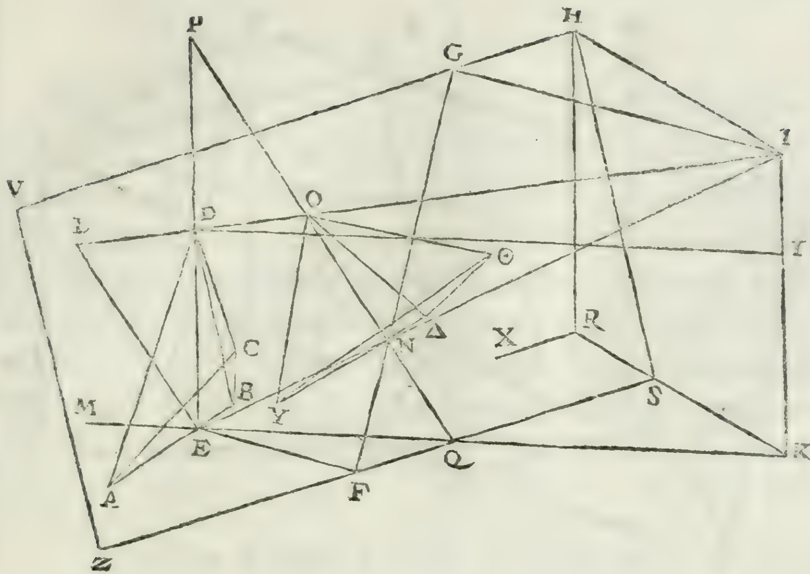
Si fuerit planum ad ſubjectum planum inclinatum: dataque ſit poſitione & magnitudine ultra id planum figura aliqua ſolida: ducanturque ab ejus angulis ad punctum citra id planum datum rectæ lineæ; quæ oritur delineatio e communibus ſectionibus plani inclinati, ac triangulorum, quorum unumquodque baſim habet unum figuræ latus, verticem punctum datum; figuræ ejuſdem SCENOGRAPHIA CONCURRENS PROCUMBENSQUE vocetur.

PROPOSITIO XI.

Data poſitione & magnitudine ultra planum ad ſubjectum planum inclinatum pyramide triangularem baſim habente, ejuſdem ſcenographiam concurrentem procumbentemque conficere.

Data ſit poſitione & magnitudine ultra planum VS inclinatum ad planum ZK pyramis ABCD, cujus ſit baſis triangulum ABC, vertex D. Datum autem ſit citra planum VS punctum I. Oportet conficere ſcenographiam concurrentem procumbentemque pyramidis ABCD.

Sit primo basis ABC in plano ZK. Inveniantur vestigium pyper 1.prop. ramidis ABCD, & altitudo anguli D; idest puncta A, B, C, E, rectaque DE. Ducatur autem a puncto I plano ZK perpenper 30. 25. & 29. dat. dicularis recta IK. Erit utique datum punctum K. Datum est per 26. dat. autem & punctum I. Igitur IK data est positione & magnitudine. Ducantur item a puncto K communi planorum VS, ZK sectioni ZS perpendicularis recta KS; atque a puncto I ipsi KS parallela ad planum VS recta IH; & a puncto H recta HR parallela ipsi IK, atque ipsi KS productæ occurrens in puncto R; jungaturque HS. Quoniam igitur HR recta est ad planum ZK, ea utique cum rectis omnibus, quæ ipsam contingentes in eodem sunt plano, rectos angulos faciet. Itaque recta ducatur RX parallela ipsi ZS; eritque RX ipsi HR ad rectos angulos. Est autem RX ad rectos angulos ipsi etiam RS. Igitur RX plano HRS ad rectos angulos est. At vero RX, ZS sunt parallelæ. Igitur etiam ZS eidem plano HRS ad rectos est angulos; ideoque utraque HS, RS cum ZS rectos angulos facit. Angulus igitur HSR est planorum VS, ZK inclinatio, ideoque datus. Jam vero quoniam in triangulo HRS dati sunt anguli HRS, HSR, dataque per cor. 40. dat. item magnitudine HR utpote quæ ipsi IK est æqualis, erit utiper 30. 25. & 26. dat. que RS magnitudine data. At vero data est magnitudine etiam per 3. dat. KS. Igitur & KR magnitudine data est, nec non eidem æqualis IH. Ducantur a puncto H ipsi ZS parallela recta HV; atque a puncto I ad HV recta IG ad angulum IGH dato cuivis æquaper cor. 40. dat. lem. Erit utique IG data magnitudine. Itaque ducatur a puncto E ad ZS recta EF ad angulum EFZ ipsi IGH æqualem, ut sit EF ipsi IG parallela; eademque fiant, quæ in Propositione septima. Eodem modo demonstrabitur, punctum N, in quo rectæ FG, IE se se invicem secant, datum esse. Ducatur modo ab E ad K recta EK ipsam ZS secans in puncto Q, eaque producatur ad M; atque DE producta plano VS occurrat in puncto P, jungaturque ab eodem ad datum punctum Q recta PQ, quæ quidem per punctum N transibit; eritque positione data. Hoc enim haud secus demonstrabitur, atque in Propositione sexta demonstratum est. Jungatur denique recta ID, ducaturque DT parallela ipsi



EK, atque EL parallela ipſi NQ. Et quoniam triangulum DIT habet angulum DTI datum, dataſque circa illum magnitudine IT, TD, erit triangulum DIT datum ſpecie & magnitudine, ideoque datus angulus IDT. Datus eſt autem etiam angulus EDT. Igitur angulus EDI eſt datus, ideoque & qui deinceps ponitur EDL. Quoniam vero datus eſt uterque angulus MED, MEL, erit utique datus angulus DEL. Igitur triangulum DEL ſpecie datum eſt. Data eſt autem magnitudine DE. Igitur triangulum DEL ſpecie & magnitudine eſt datum; ideoque data magnitudine EL. Jam vero quoniam EL, NO ſunt parallelæ, ut EI ad IN ita ſe habebit EL ad NO. Ut autem EI ad IN, ita ſe habet FG ad GN. Ut igitur FG ad GN, ita ſe habet EL ad NO. At vero ratio, quam FG habet ad GN, eſt data. Igitur & ratio data eſt, quam EL habet ad NO. Data eſt autem magnitudine EL. Data eſt igitur magnitudine etiam NO. Atqui data eadem eſt etiam poſitione, datumque unum ejus extremum N. Igitur & alterum extremum O datum eſt. Inveniantur puncta Y, Δ, Θ haud ſecus ac punctum N inventum eſt, rectæque jungantur YΔ, ΔΘ, YΘ, itemque OY, OΔ, OΘ. Erunt utique YΔ,

per cor. 41. dat.

per 3. dat.

per 4. dat.

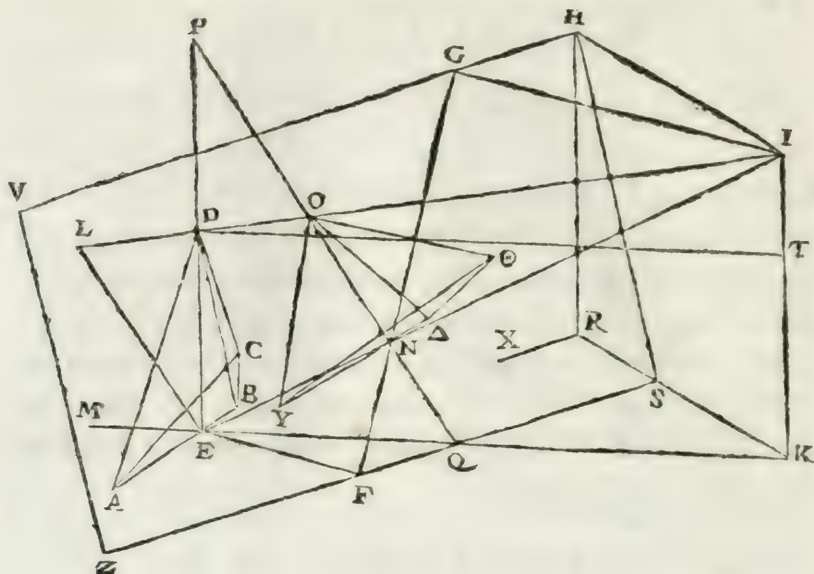
per 40. dat.

per. cor. ejusd.

per 5. dat.

per 2. dat.

per 27. dat.



ΔΘ, YΘ, OY, OΔ, OΘ communes ſectiones plani VS, ac triangulorum IAB, IBC, IAC, IAD, IBD, ICD. Ac pyramidis ABCD latus AB eſt baſis trianguli IAB; & cætera, ut in ſeptima Propoſitione. Quæ autem oritur delineatio ex hujuſmodi ſectionibus figuræ ſcenographia concurrens procumbenſque vocatur. Igitur delineatio YΔΘO ſcenographia concurrens procumbenſque eſt pyramidis ABCD. Quod ſi pyramidis ABCD ſit in plano ZK ſive latus BC, ſive angulus B, inventis veſtigiis, & angulorum altitudinibus, deſcriptiſque figuris, demonſtratio eodem modo conficietur.

Data igitur poſitione & magnitudine; & quæ ſequuntur. Quod oportebat facere.

COROL-

COROLLARIUM I.

Illud vero manifeſtum eſt, puncta N, O delineationis YΔΘO haud ſecus in hac Propoſitione inveniri poſſe, atque in ſeptima, per Propoſitiones octavam & nonam, inventa ſint; ſi ad punctum O quod attinet pro DE ſumatur LE, eaque a puncto quovis communis planorum VS, ZK ſectionis ita ducatur, ut ipſi PQ ſit parallela. Ex quo ſequitur non omnes rectas, cujuſmodi eſt LE, ſi plures ſint, in una eademque recta poſitione data ſumi poſſe, ſed eas tantum, quas inter ſe invicem parallelas eſſe contigerit.

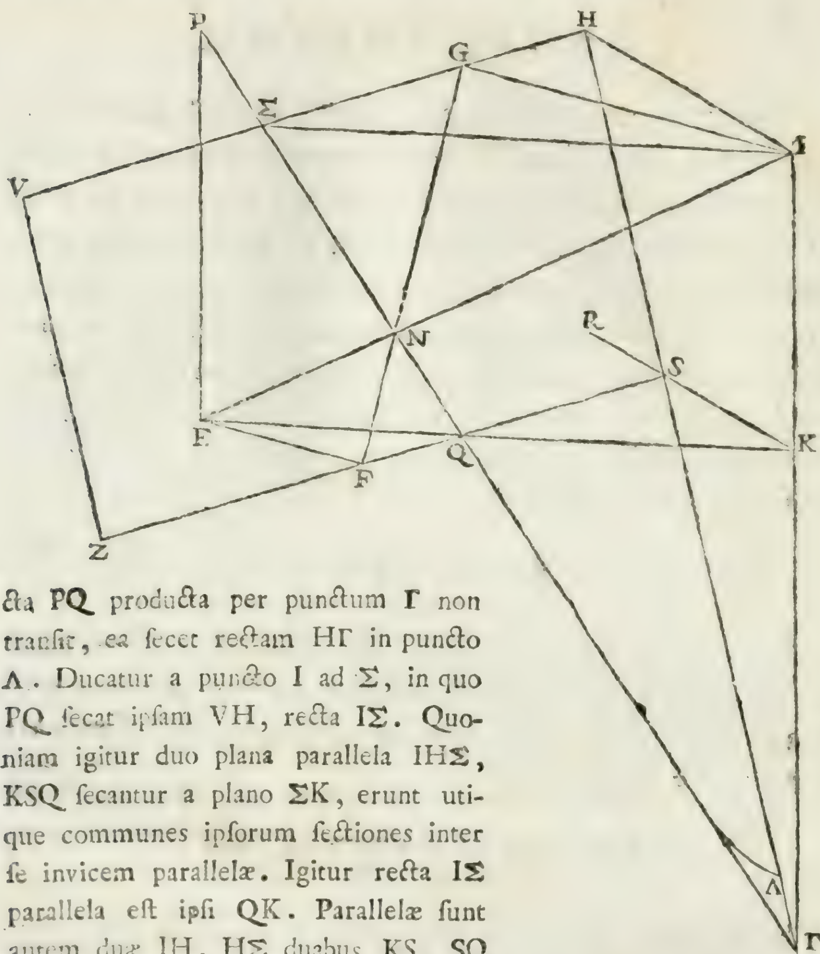
COROLLARIUM II.

Quin etiam illud eſt manifeſtum, quod de ſcenographia concurrente pyramidis ABCD in Propoſitione decima demonſtratum eſt, idem de concurrente procumbenteque poſſe demonſtrari.

PROPOSITIO XII.

Si in figura ſuperioris Propoſitionis producantur rectæ HS, IK, quouſque conveniant invicem in puncto Γ, punctum Γ datum erit; rectaque PQ producta tranſibit per punctum Γ.

Quoniam enim in triangulo IHΓ datus eſt angulus HIΓ, itemque ipſi RSH æqualis IHΓ, triangulum utique IHΓ ſpecie datum erit; data eſt autem magnitudine recta IH. Igitur triangulum IHΓ ſpecie & magnitudine datum eſt, ideoque HΓ magnitudine data. Data eſt autem HΓ etiam poſitione, datumque unum ejus extremum H. Igitur & alterum Γ eſt datum. Jam vero ſi re- per 40 dat. per cor. ejuſd. per 27. dat.



cta PQ producta per punctum Γ non transit, ea secet rectam HΓ in puncto Λ. Ducatur a puncto I ad Σ, in quo PQ secat ipsam VH, recta IΣ. Quoniam igitur duo plana parallela IHΣ, KSQ secantur a plano ΣK, erunt utique communes ipsorum sectiones inter se invicem parallelæ. Igitur recta IΣ parallela est ipsi QK. Parallelæ sunt autem duæ IH, HΣ duabus KS, SQ altera alteri. Igitur triangulum IHΣ æquiangulum est triangulo KSQ; ac propterea, ut IH ad KS, ita se habet HΣ ad SQ. Ut autem IH ad KS, ita se habet HΓ ad ΓS, & ut HΣ ad SQ, ita se habet HΛ ad ΛS. Igitur, ut HΓ ad ΓS, ita se habet HΛ ad ΛS. Et dividendo, HS ad SΓ ita se habet, ut HS ad SΛ; ideoque SΓ æqualis est ipsi SΛ, major minori; quod fieri non potest. Non igitur recta PQ producta secat rectam HΓ in puncto Λ. Sed neque in alio quovis puncto præterquam in Γ. Igitur recta PQ producta transit per punctum Γ. Quod oportebat demonstrare.

COROLLARIUM.

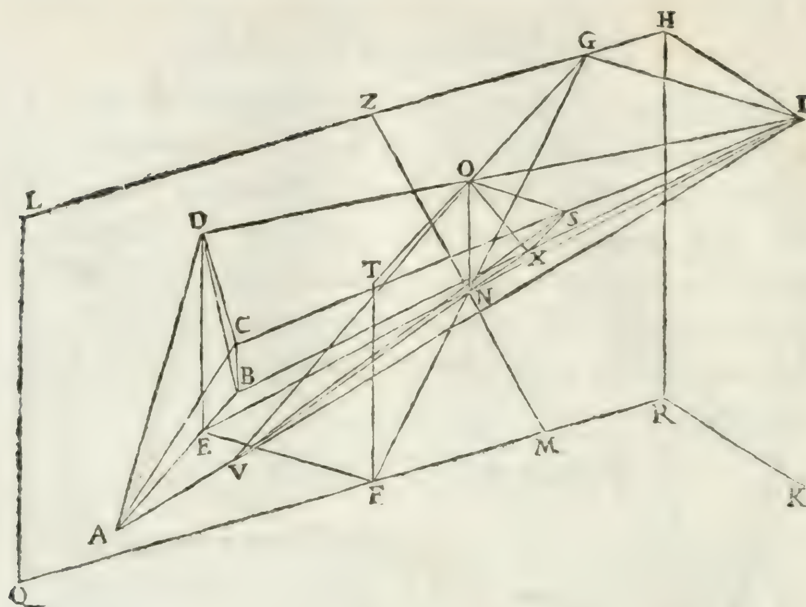
Ex hoc manifeſtum eſt in undecima Propoſitione, invento quidem puncto N, rectæ PQ poſitionem aliter quæri poſſe, atque in illa inventa ſit. Quod vero de recta PQ demonſtratum eſt, idem conſtat demonſtrari poſſe de hujuſmodi rectis, ſiquæ ſint. Ex quo ſequitur, puncto quidem ad quamque quod attinet invento, cujuſmodi eſt N, uniuſcujuſque poſitionem facillime inventum iri.

PROPOSITIO XIII.

Datis poſitione & magnitudine ſolidæ cujuslibet figuræ delineatione, ſive ea ſcenographia concurrens ſit, ſive concurrens procumbenſque, & ſcenographica cujuſque anguli ejuſdem figuræ altitudine; datoque puncto, unde ea delineatio confecta eſt, figuram ipſam invenire.

Sit in plano LR perpendiculari plano QK delineatio VXSO ſcenographia concurrens pyramidis triangularem baſim habentis; NO altitudo ſcenographica anguli O; I punctum, unde ea delineatio confecta eſt. Oportet invenire ipſam pyramidem.

Quærantur, ut in Propoſitione ſeptima, recta IG, punctum G, angulusque IGH. Ducatur autem per data puncta G, N re- per 4. def. dat.
cta GF. Ea erit utique poſitione data. Data eſt autem poſitione per 26. dat.
etiam QR. Igitur punctum F eſt datum. Sumatur modo in GL per 25. dat.
ipſi IG æqualis GZ, ducaturque per data puncta Z, N recta per 27. dat.
ZM. Erit utique datum punctum M. Datum eſt autem & pun- per 25. dat.
ctum F. Igitur FM magnitudine eſt data. Ducatur FE ipſi IG per 26. dat.
parallela, eadem æqualis ipſi FM; eritque FE poſitione data & per 28. dat.
magnitudine. Datum eſt autem unum ejus extremum F. Igitur
& alterum E eſt datum. Jungantur rectæ IN, NE. Et quoniam per 27. dat.
ut GN ad NF, ita ſe habet GZ ad FM, æqualeſque ſunt GZ



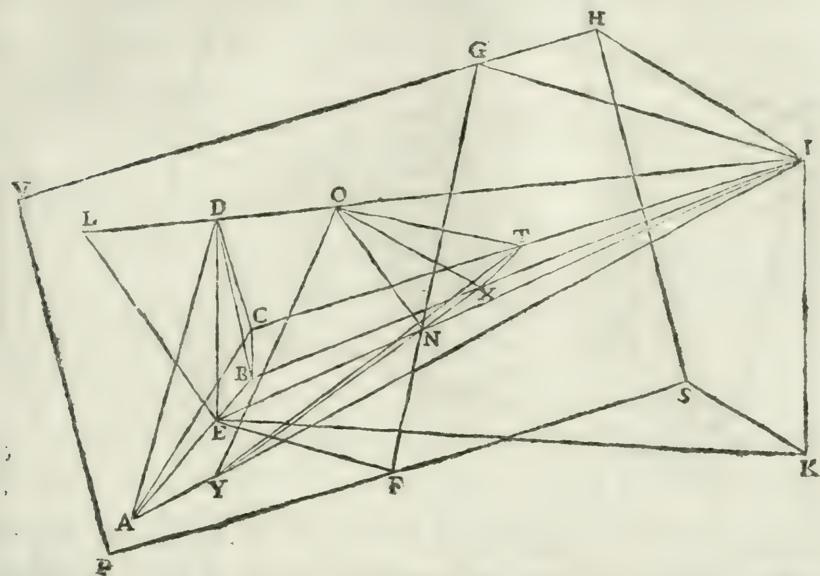
ipſi GI, & FM ipſi FE; ſe habebit utique ut GN ad NF, ita GI ad FE. Et permutando, ut GN ad GI, ita NF ad FE. At vero angulus IGN æqualis eſt angulo NFE. Igitur triangulum IGN triangulo NFE eſt æquiangulum; ideoque angulus ING æqualis angulo ENF. Erit igitur IN in directo ipſi NE. Eodem modo invenientur puncta A, B, C; ac demonſtrabitur rectas IV, VA; IS, SC; IX, XB ſibi invicem eſſe in directo. Ducatur modo a puncto F ipſi NO parallela recta FT, & a puncto G per O recta GT. Atque erunt FT, GT poſitione datæ. Punctum igitur T eſt datum. Datum eſt autem & punctum F. Igitur FT magnitudine eſt data. Ducatur denique a puncto E ipſi FT æqualis & parallela, ideoque plano QK ad rectos angulos recta DE; junganturque rectæ IO, OD. Et quoniam ut FG ad GN, ita ſe habet tum EI ad IN, tum FT, ſive eidem æqualis ED, ad NO, ſe habebit utique ut EI ad IN, ita ED ad NO. At vero ED parallela eſt ipſi NO. Igitur recta IO in directo quidem eſt ipſi OD. Itaque ſi rectæ jungantur AB, BC, CA, itemque AD, BD, CD, erit ABCD pyramis triangularem ba-

per 4. def. dat.

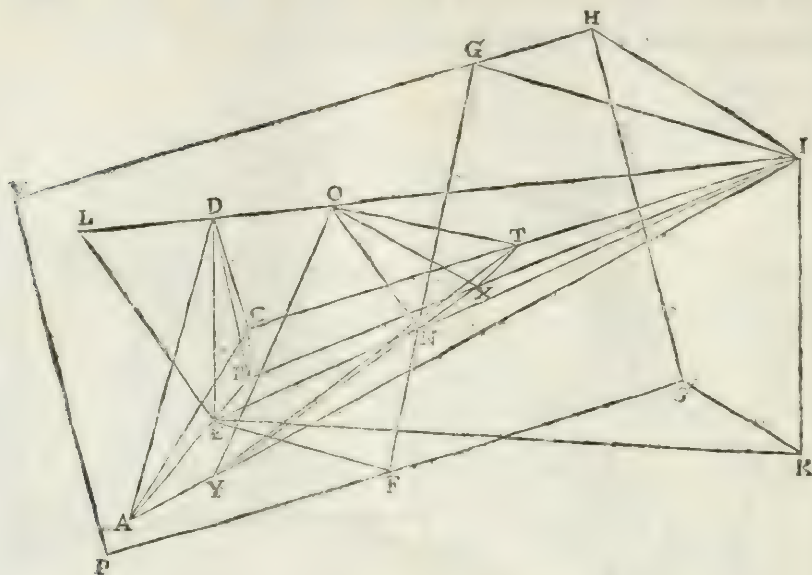
per 25. dat.

per 26. dat.

ſim habens ABC, altitudinem ED; ex qua a dato puncto I ejuſdem pyramidis ſcenographia concurrens confecta eſt VXSO.



Sit modo in plano VS inclinato ad planum PK delineatio YXTO ſcenographia concurrens procumbenſque pyramidis triangularem baſim habentis; NO altitudo ſcenographica anguli O; I punctum, unde ea delineatio confecta eſt. Quærantur, ut in Propoſitione undecima, recta IG, punctum G, angulusque IGH. Invenientur autem in hac ſcenographia haud ſecus, atque in concurrente inventa ſint, puncta E, A, B, C, rectaque EL ipſi NO parallela; ac demonſtrabitur in directo ſibi invicem eſſe rectas IN, NE; IY, YA; IX, XB; IT, TC; IO, OL. Ducatur a puncto E ipſi IK parallela, ideoque plano PK ad rectos angulos recta ED; jungaturque EK. Et quoniam trianguli ILE datus eſt angulus IEL, datæque circa illum magnitudine IE, EL, erit utique datum ſpecie & magnitudine triangulum ILE; ideoque datus angulus EIL. Rurſus quoniam trianguli IDE dati ſunt anguli tum EID, tum IED, ob datum utrumque angulum DEK, IEK, erit triangulum IDE datum ſpecie. Data eſt autem magni- per cor. 41. dat. per 4. dat. per 40. dat.



per cor. 40. dat. tudine EI. Triangulum igitur IDE ſpecie & magnitudine eſt datum; ideoque data magnitudine ED. Itaque ſi rectæ jungantur AB, BC, CA, itemque AD, BD, CD, erit ABCD pyramis triangularem habens baſim ABC, altitudinem ED; ex qua a dato puncto I ejuſdem pyramidis ſcenographia concurrens procumbenſque YXTO confecta eſt. Eodem modo, datis poſitione & magnitudine ſolidæ alius cujuslibet figuræ delineatione, ſive ea ſcenographia concurrens ſit, ſive concurrens procumbenſque, & ſcenographica cujuſque anguli ejuſdem figuræ altitudine, datoque puncto, unde ea delineatio confecta eſt, figuram ipſam inveniemus.

DEFINITIO.

Si fuerit planum ſubjecto plano parallelum, idemque poſitione datum: dataque ſit poſitione & magnitudine ultra id planum figura aliqua ſolida; ducanturque ab ejus angulis rectæ lineæ priori illi plano perpendiculares; quæ oritur delineatio e communibus planorum ſectionibus,

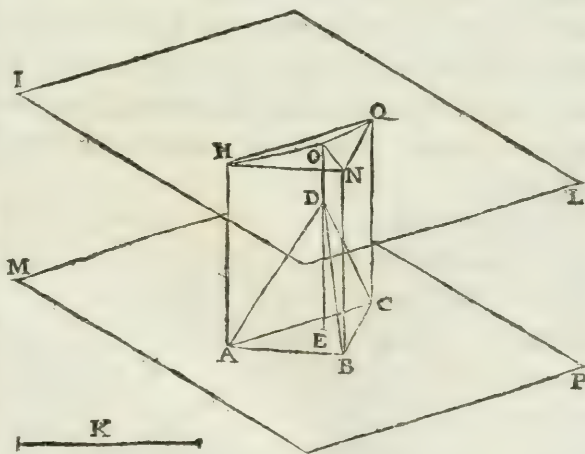
tum paralleli, tum eorum, quæ a binis earum, quas diximus, perpendicularium utrinque terminantur, ita ut communis unaquæque ſectio oppoſito figuræ lateri reſpondeat; figuræ ejuſdem ORTHOGRAPHIA HORIZONTALIS vocetur.

PROPOSITIO XIV.

Data poſitione & magnitudine ultra planum ſubjecto plano parallelum, idemque poſitione datum pyramide triangularem baſim habente, ejuſdem orthographiam horizontalem conficere.

Data ſit poſitione & magnitudine ultra planum IL parallelum plano MP, idemque diſtans ab eodem intervallo K, pyramis ABCD, cujus ſit baſis triangulum ABC, vertex D. Oportet conficere orthographiam horizontalem pyramidis ABCD.

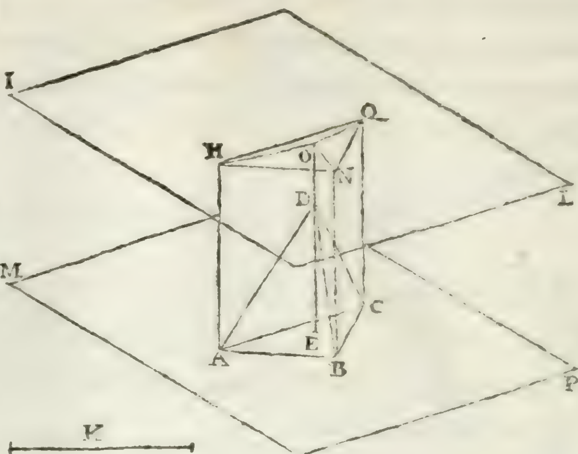
Sit primo baſis ABC in plano MP. Inveniatur veſtigium pyramidis ABCD; ideſt puncta A, B, C, E: ducanturque ab hiſce punctis plano IL ad rectos angulos rectæ AH, BN, CQ, EO, quæ quidem eidem occurrant in punctis H, N, Q, O. Et quoniam a puncto A plano IL ad rectos angulos ducta eſt AH, ea utique erit poſitione data. Data eſt autem & magnitudine, utpote quæ ipſi K eſt æqualis; datumque unum ejus extremum A. Igitur & alterum H eſt datum. Eodem modo demonſtrabitur puncta N, Q, O data eſſe. Itaque



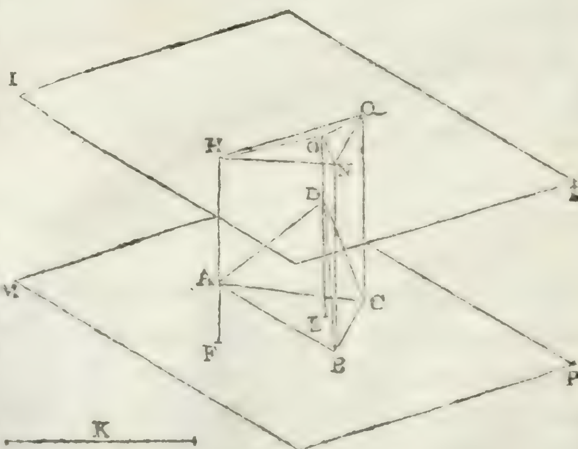
per 1. prop.

per 29. dat.

per 27. dat.



si rectæ jungantur HN, NQ, QH, itemque HO, NO, QO, eæ communes erunt sectiones planorum tum IL, tum AN, BQ, CH, AO, BO, CO: quorum primum terminatur a perpendicularibus AH, BN; secundum a perpendicularibus BN, CQ; tertium a perpendicularibus AH, CQ; quartum a perpendicularibus DO, AH; quintum a perpendicularibus DO, BN; sextum a perpendicularibus DO, CQ. Ac pyramidis ABCD lateri AB respondet sectio HN; lateri BC sectio NQ; lateri AC sectio HQ; lateri AD sectio OH; lateri BD sectio ON; lateri CD sectio OQ. Quæ autem oritur delineatio ex hujusmodi sectionibus, figuræ orthographia horizontalis vocatur. Igitur delineatio HNQO orthographia horizontalis est pyramidis ABCD.

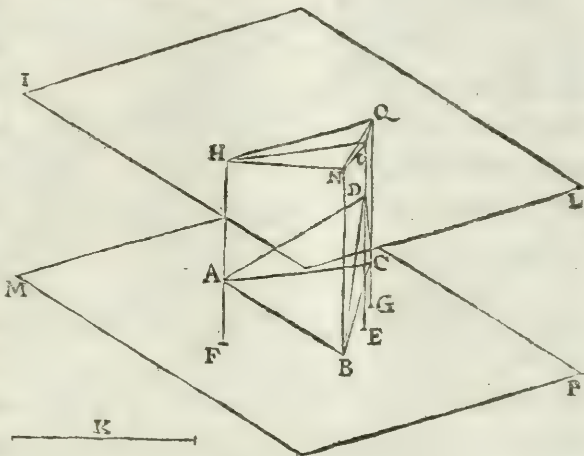


At vero basis ABC latus BC sit in plano MP. Inveniatur vestigium pyramidis ABCD; idest puncta F, B, C, E: ducanturque ab hisce punctis plano IL ad rectos angulos rectæ FH, BN, CQ, EO, quæ quidem eidem oc-

currant

currant in punctis H, N, Q, O; describaturque figura. Eodem, quo supra, modo demonstrabitur delineationem HNQO esse orthographiam horizontalem pyramidis ABCD.

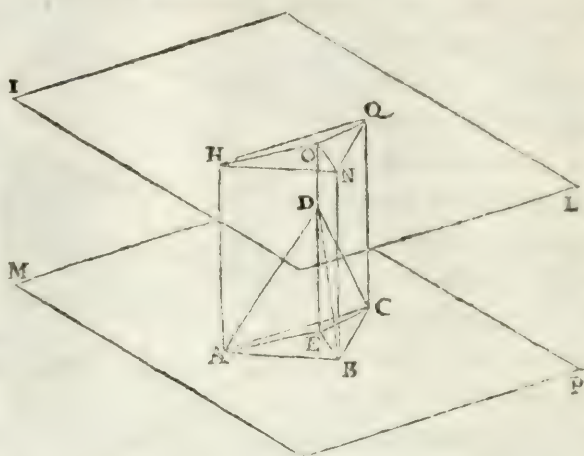
Sit denique pyramidis ABCD angulus B in plano MP. Inveniatur vestigium pyramidis ABCD; idest puncta F, B, G, E: ducanturque ab hisce punctis plano IL ad rectos angulos rectæ FH, BN, GQ, EO, quæ quidem eidem occurrant in punctis H, N, Q, O; describaturque figura. Eodem, quo supra, modo demonstrabitur delineationem HNQO esse orthographiam horizontalem pyramidis ABCD.



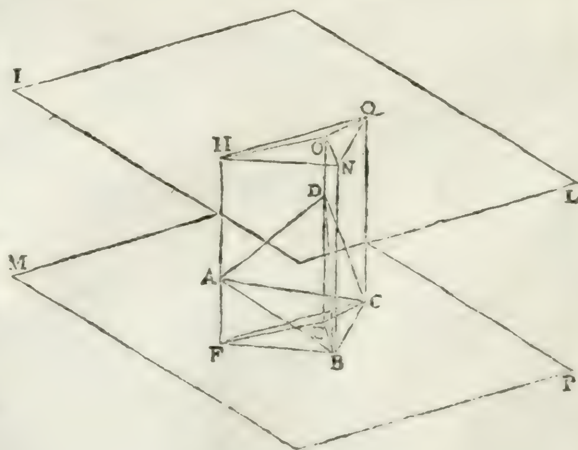
Data igitur positione & magnitudine; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

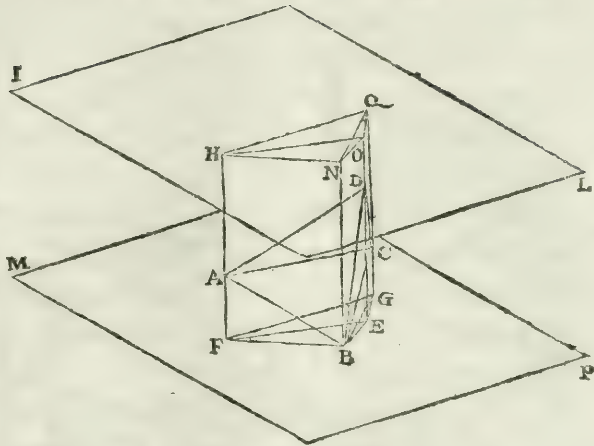
Quoniam in prima figura AB, BC parallelæ ſunt & æquales ipſis HN, NQ, anguluſque ABC æqualis eſt angulo HNQ; erit utique triangulum ABC æquale triangulo HNQ, eidemque ſimile ac ſimiliter poſitum. Idem, ſi rectæ jungantur AE, BE, CE, concluditur de triangulis tum AEB, HON, tum BEC, NOQ, tum AEC, HOQ. Ex quo illud manifeſtum eſt, figuram ABCE, quæ in ſubjecto plano MP deſcribitur, delineationem repræſentare, quæ in plano parallelo IL utique conficienda erat.



Haud ſecus res habet in figuris ſecunda, & tertia; ſi junctis in earum altera rectis BF, FC, FE, BE, CE figuræ inter ſe invicem comparentur FBCE, HNQO; in al-



tera junctis rectis FB, BG, GF, FE, BE, GE comparentur inter se invicem figuræ FBGE, HNQO.



DEFINITIO.

Si fuerit planum ſubjecto plano parallelum, idemque poſitione datum; dataque ſit poſitione & magnitudine ultra id planum figura aliqua ſolida; ducanturque ab ejus angulis rectæ lineæ rectæ cuidam parallelæ ad ſubjectum planum inclinatæ; quæ oritur delineatio e communibus planorum ſectionibus tum paralleli, tum eorum, quæ a binis earum, quas diximus, parallelarum utrinque terminantur, ita ut communis unaquæque ſectio oppoſito figuræ lateri reſpondeat, figuræ ejuſdem SCENOGRAPHIA PARALLELA HORIZONTALIS vocetur.

PROPOSITIO XV.

Data poſitione & magnitudine ultra planum ſubjecto plano parallelum, idemque poſitione datum pyramide triangularem baſim habente, ejuſdem ſcenographiam parallelam horizontalem conficere.

Data ſit poſitione & magnitudine ultra planum YX parallelum plano ΓΛ, idemque diſtans ab eodem intervallo K, pyramis

ABCD, cujus ſit baſis triangulum ABC, vertex D. Oportet conficere ſcenographiam parallelam horizontalem pyramidis ABCD.

Sit primo baſis ABC in plano ΓΛ. Inveniatur veſtigium pyramidis ABCD, & altitudo anguli D; ideſt puncta A, B, C, E, rectaque DE. Sit autem rectæ PV ad planum ΓΛ inclinatio angulus PVΔ; ſitque recta PΔ perpendicularis plano ΓΛ. Jungatur recta EV; ducaturque EZ ipſi VΔ parallela, & ΔΞ parallela ipſi EV. Erit utique punctum Ξ datum. Ducatur ab Ξ plano ΓΛ ad rectos angulos, eademque ipſi ΔP æqualis recta ΞΦ; junganturque EΦ, ΦP. Quoniam igitur ΞΦ, ΔP ſunt æquales & parallelæ, erit utique ΦP æqualis & parallela ipſi ΞΔ. Eſt autem ΞΔ ipſi EV æqualis & parallela. Igitur ΦP æqualis eſt & parallela eidem EV; ideoque EΦ æqualis & parallela ipſi VP. Producatur EΦ, ita ut plano YX occurrat in puncto M; atque ab eo ducatur MZ ipſi ΦΞ parallela. Et quoniam trianguli EMZ dati ſunt anguli ZEM, MZE, erit triangulum EMZ datum ſpecie. Data eſt autem magnitudine ZM. Triangulum igitur EZM ſpecie & magnitudine eſt datum; ideoque data magni-

per 1. prop.

per 25. dat.

per 40. dat. per cor. ejuſd.

tudine EZ. Atqui datum eſt unum ejus extremum E. Igitur & alterum Z eſt datum. Data eſt igitur poſitione ZM. At vero data eadem eſt & magnitudine; datumque unum ejus extremum Z. Igitur & alterum M eſt datum. Eodem modo inventis punctis R, S, T, demonſtrabitur puncta H, N, Q data eſſe. Producatur ED, ita ut plano YX occurrat in puncto I. Erit utique datum punctum I. Datum eſt autem & punctum M. Igitur ſi recta jungatur IM, ea poſitione & magnitudine data erit. Fiat modo ut IE ad ED, ita IM ad MO. Et quoniam ratio data eſt, quam IE habet ad ED, data erit & ratio, quam habet IM ad MO. Data eſt autem magnitudine IM. Igitur etiam MO, quæ poſitione data eſt, magnitudine eſt data. Atqui datum eſt unum ejus extremum M. Igitur & alterum O eſt datum. Itaque ſi rectæ jungantur HN, NQ, QH, itemque HO, NO, QO, eæ erunt communes ſectiones planorum tum YX, tum AN, BQ, CH, AO, BO, CO: quorum primum terminatur a parallelis AH, BN; & cætera, ut in Propoſitione decima quarta. Quæ autem oritur delineatio ex hujuſmodi ſectionibus, ſcenographia parallela horizontalis vocatur. Igitur delineatio HNQO ſcenographia parallela horizontalis eſt pyramidis ABCD. Quod ſi pyramidis ABCD ſit in plano ΓΛ ſive latus BC, ſive angulus B, inventis veſtigiis, & angulorum altitudinibus, deſcriptiſque figuris, demonſtratio eodem modo conficitur.

per 27. dat.
per 30. dat.
per 26. dat.
per 1. dat.
per 2. dat.

Data igitur poſitione & magnitudine; & quæ ſequuntur. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM I.

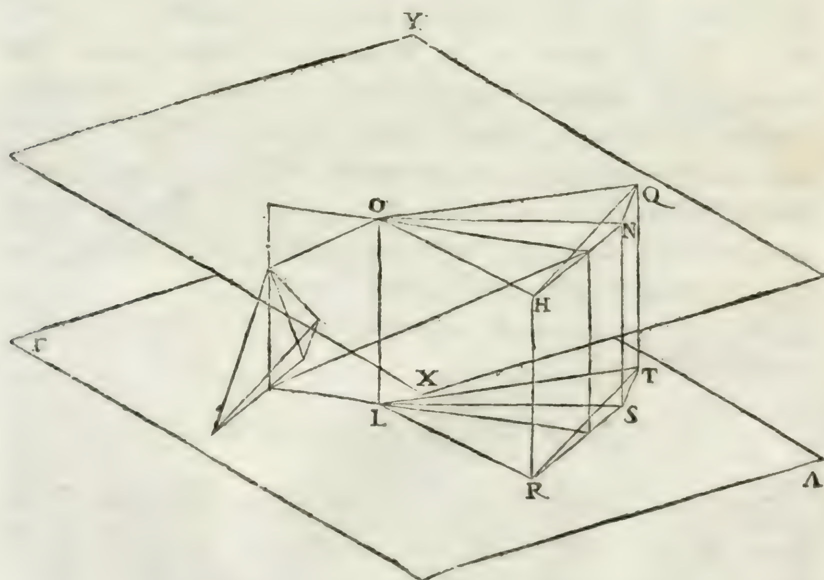
Quoniam demonſtratum eſt, ut IE ad ED, ita ſe habere IM ad MO, illud conſtat, ſi IE ipſi IM æqualis fuerit, ſive angulus IEM dimidium anguli recti, etiam DE ipſi MO æqualem fore.

COROLLARIUM II.

Quin etiam quoniam in triangulis AHR, EMZ anguli RAH, HRA æquales ſunt angulis ZEM, MZE alter alteri, æqualisque RH ipſi ZM, erit utique AR æqualis ipſi EZ. Eodem quoque modo concluditur utramque rectam BS, CT, itemque aliam hujuſmodi quamlibet, ſiqua ſit, ipſi EZ æqualem eſſe.

COROLLARIUM III.

Quod ſi rectæ jungantur RS, ST, TR, ductaque OL plano ΓΛ perpendiculari eidemque occurrente in pun-



cto L dato, jungantur item rectæ RL, SL, TL, demonſtrabitur, ut in Corollario Propoſitionis decimæ quartæ, triangula tum RST, HNQ; tum RLS, HON; tum SLT,

NOQ; tum RLT, HOQ æqualia inter ſe invicem eſſe, eademque ſimilia ac ſimiliter poſita. Ex quo illud manifeſtum eſt, figuram RSTL, quæ in ſubjecto plano ΓΛ deſcribitur, delineationem repræſentare, quæ in plano parallelo YX utique conficienda erat. Idem demonſtrabitur in figura ſecunda & tertia, ſi figuræ, in ſuo quæque plano, eodem modo inter ſe invicem comparentur.

DEFINITIO.

Si fuerit planum ſubjecto plano parallelum, idemque poſitione datum; dataque ſit poſitione & magnitudine ultra id planum figura aliqua ſolida: ducanturque ab ejus angulis ad punctum citra id planum datum rectæ lineæ; quæ oritur delineatio e communibus ſectionibus plani paralleli, ac triangulorum, quorum unumquodque baſim habet unum figuræ latus, verticem punctum datum, figuræ ejuſdem SCENOGRAPHIA CONCURRENS HORIZONTALIS vocetur.

PROPOSITIO XVI.

Data poſitione & magnitudine ultra planum ſubjecto plano parallelum, idemque poſitione datum pyramide triangularem baſim habente, datoque citra id planum puncto aliquo, ejuſdem ſcenographiam concurrentem horizontalem conficere.

Data ſit poſitione & magnitudine ultra planum YX parallelum plano ΓΛ, idemque diſtans ab eodem intervallo K, pyramis ABCD, cujus ſit baſis triangulum ABC, vertex D. Datum autem ſit citra planum YX punctum I. Oportet conficere ſcenographiam concurrentem horizontalem pyramidis ABCD.

Sit primo baſis ABC in plano ΓΛ. Inveniatur veſtigium py-
per 1.prop. ramidis ABCD; & altitudo anguli D; ideſt puncta A, B, C,
E, rectaque DE. Ducatur autem a puncto I plano ΓΛ perpen-
dicularis recta IΛ, quæ plano YX occurrat in puncto Δ. Erunt
per. 30. 25. & 26. dat. utique IΛ, IΔ poſitione & magnitudine datæ. Ducatur recta
IA, eaque plano YX occurrat in puncto H; junganturque AΛ,
HΔ, quæ quidem erunt communes ſectiones planorum ΓΛ, YX,
& trianguli AIΛ, ideoque ſibi invicem parallelæ. Quoniam igi-
per 1. dat. tur ut AI ad IΔ, ita ſe habet AΛ ad HΔ; ratioque data eſt,
quam habet AI ad IΔ, erit utique data & ratio, quam AΛ ha-
per 26. dat. bet ad HΔ. Data eſt autem magnitudine AΛ. Data eſt igitur
per 2. dat. magnitudine etiam HΔ. Atqui data eadem eſt & poſitione, da-
per 28. dat. tumque unum ejus extremum Δ. Igitur & alterum H eſt da-
per 27. dat. tum. Eodem modo demonſtrabitur puncta N, Q data eſſe. Jun-
gatur recta EΛ, ducaturque a puncto D eidem parallela DZ.
Erunt utique ZΛ, DZ magnitudine datæ, utpote quæ æquales
ſunt altera ipſi DE, altera ipſi EΛ. Quod ſi a puncto I ducatur
ID plano YX occurrens in puncto O, jungaturque OΔ, ea erit
ipſi DZ parallela. Quoniam igitur ut ZI ad IΔ, ita ſe habet DZ
ad

ad OΔ, ratioque data eſt, quam habet ZI ad IΔ; quando utraque magnitudine eſt data; erit utique data & ratio, quam DZ habet ad OΔ. Data eſt autem magnitudine DZ. Data eſt igitur magnitudine & OΔ. Atqui data eadem eſt & poſitione, datumque unum ejus extremum Δ. Igitur & alterum O eſt datum. Itaque ſi rectæ jungantur HN, NQ, QH, itemque HO, NO, QO, hæ erunt communes ſectiones plani YX, ac triangulorum IAB, IBC, IAC, IAD, IBD, ICD. Ac pyramidis ABCD latus AB eſt baſis trianguli IAB; latus BC baſis trianguli IBC; latus AC baſis trianguli IAC; latus AD baſis trianguli IAD; latus BD baſis trianguli IBD; latus CD baſis trianguli ICD. Quæ autem oritur delineatio ex hujuſmodi ſectionibus, figuræ ſcenographia concurrens horizontalis vocatur. Igitur delineatio HNQO ſcenographia concurrens horizontalis eſt pyramidis ABCD.

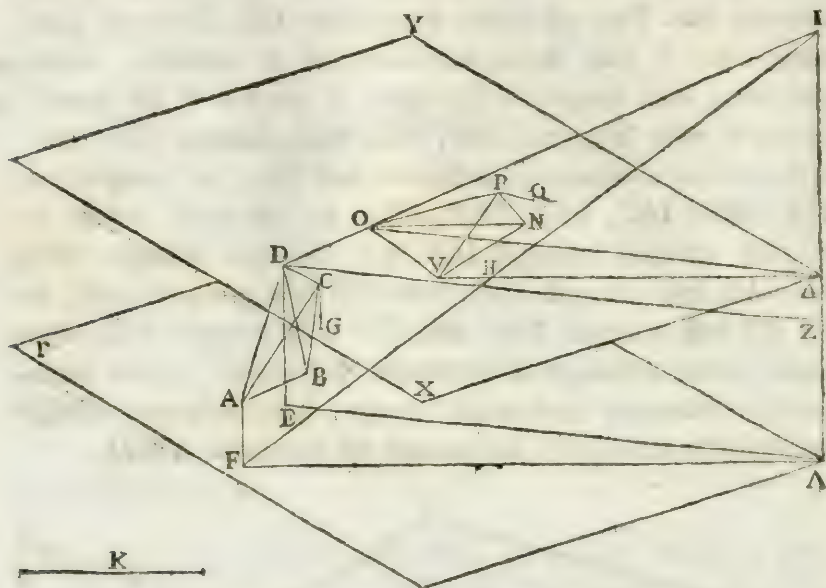
per 4. & 1. dat.

per 28. dat.

per 27. dat.

At vero baſis ABC latus BC ſit in plano ΓΛ. Inveniantur veſtigium pyramidis ABCD, & altitudines angulorum D, A ideſt puncta B, C, F, E, rectæque DE, AF; deſcribaturque figura. Eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur, delineationem

VNQO esse scenographiam concurrentem horizontalem pyramidis ABCD.

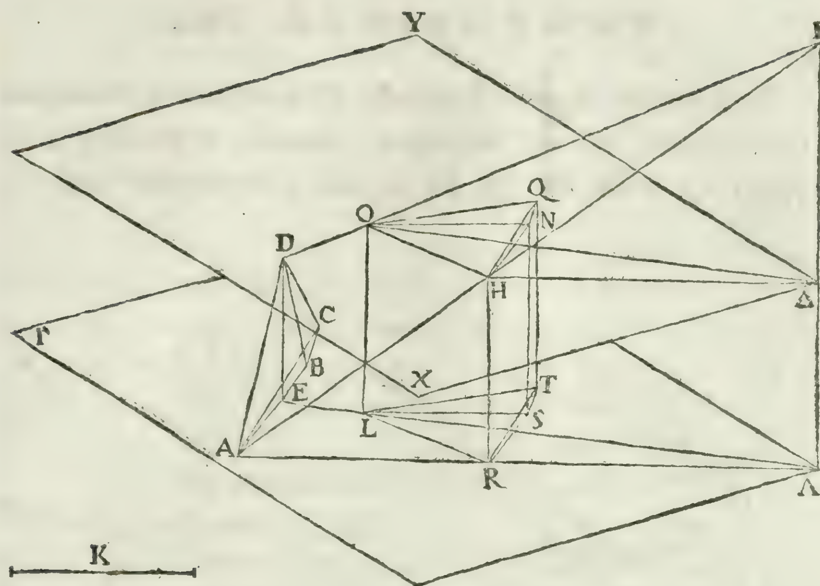


Sit denique pyramidis ABCD angulus B in plano ΓΛ. Inveniantur vestigium pyramidis ABCD, & altitudines angulorum A, C, D; idest puncta B, F, G, E, rectæque AF, CG, DE; describaturque figura. Eodem, quo supra, modo demonstrabitur, delineationem VNPO esse scenographiam concurrentem horizontalem pyramidis ABCD.

Data igitur positione & magnitudine; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

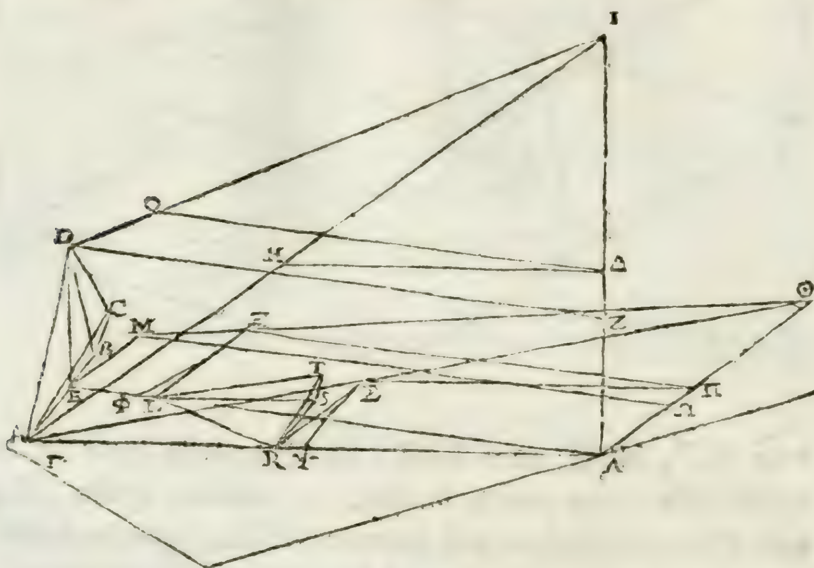
Quod si in prima figura a punctis H, N, Q, O plano ΓΛ perpendiculares ducantur rectæ HR, NS, QT, OL, junganturque RS, ST, TR, itemque SL, TL, RL, demonstrabitur, ut in Corollario Propositionis decimæ quartæ, triangula tum RST, HNQ; tum RLS, HON;



tum SLT, NOQ; tum RLT, HOQ æqualia inter ſe invicem eſſe, eademque ſimilia, ac ſimiliter poſita. Ex quo illud manifeſtum eſt figuram RSTL, quæ in ſubjecto plano ΓΛ deſcribitur, delineationem repræſentare, quæ in plano parallelo YX utique conficenda erat. Idem demonſtrabitur in figura ſecunda & tertia, ſi figuræ, in ſuo quæque plano, eodem modo inter ſe invicem comparentur.

PROPOSITIO XVII.

Si in prima figura ſuperioris Propoſitionis, Corollarii diagrammate in ea deſcripto, ducatur a puncto Λ in plano ΓΛ recta ΛΘ ipſi IΛ æqualis, anguloſque cum AΛ



quoſcumque faciens; deinde vero a ΛΘ auferatur ΛΠ æqualis ipſi ΛΔ, junctaque AΘ, ducatur a puncto Π ipſi AΛ parallela recta ΠΣ ipſi AΘ occurrens in Σ; quæ recta ab hoc puncto ducitur parallela ipſi ΛΘ, ea per punctum R tranſibit. Item ſi a puncto E in plano ΓΛ ducatur recta EM æqualis ipſi ED, eademque parallela ipſi ΛΘ, junctaque MΘ, a puncto Π ducatur ΠΞ parallela ipſi EΛ, occurrenſque ipſi MΘ in Ξ; quæ recta ducitur ab hoc puncto parallela ipſi ΛΘ, ea tranſibit per punctum L.

Si enim recta, quæ a puncto Σ ducitur ipſi ΛΘ parallela, per punctum R non tranſit, ea ſecet rectam AΛ in puncto Υ, ut

ΣΨ. Quoniam igitur ut AI ad IΔ, ita se habet AΛ ad ΔH sive ad ΛR, æqualesque sunt AI ipsi ΛΘ, & IΔ ipsi ΘΠ; ideo se habebit ut ΛΘ ad ΘΠ, ita AΛ ad ΛR. Ut autem ΛΘ ad ΘΠ, ita se habet AΛ ad ΣΠ. Ut igitur AΛ ad ΣΠ, ita se habet AΛ ad ΛR. Igitur ΣΠ æqualis est ipsi ΛR. Æqualis est autem ΣΠ ipsi ΨΛ; quoniam ΛΠΣΨ est parallelogrammum. Æqualis est igitur RΛ ipsi ΨΛ, major minori; quod fieri non potest. Non igitur recta ΣΨ secat rectam AΛ in puncto Ψ. Sed neque in alio quovis, præterquam in R. Igitur recta ΣΨ transit per punctum R. Quod erat unum. Jam vero recta, quæ a puncto Ξ ducitur ipsi ΛΘ parallela, non transeat per punctum L, sed secet rectam EΛ in puncto Φ, ut ΞΦ. Ducatur a puncto M recta MΩ parallela ipsi EΛ. Et quoniam, ut IZ ad IΔ, ita se habet EΛ ad OΔ sive ad LΛ; æqualesque sunt IZ ipsi ΘΩ, & IΔ ipsi ΘΠ; ideo se habebit, ut ΘΩ ad ΘΠ, ita EΛ ad LΛ. Ut autem ΘΩ ad ΘΠ, ita se habet MΩ sive EΛ ad ΞΠ. Ut igitur EΛ ad ΞΠ, ita se habet EΛ ad LΛ. Igitur ΞΠ æqualis est ipsi LΛ. Æqualis est autem ΞΠ ipsi ΦΛ; quoniam ΦΛΠΞ est parallelogrammum. Æqualis est igitur ΦΛ ipsi LΛ, major minori; quod fieri non potest. Non igitur recta ΞΦ secat rectam EΛ in puncto Φ. Sed neque in alio quovis, præterquam in L. Igitur recta ΞΦ transit per punctum L. Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est puncta R, S, T, L delineationis RSTL aliter inveniri posse, atque in Corollario Propositionis decimæ sextæ inventa sunt.

PETITIO.

Petimus solidam figuram curva superficie comprehensam per figuram eidem inscriptam posse repræsentari.

PROPOSITIO XVIII.

Data ſphæra poſitione & magnitudine, datoque extra ipſam puncto aliquo, figuram ejus ſegmento inſcribere, cujus ſit baſis circulus, ad quem rectæ ſphæram a dato puncto contingentes pertingunt, vertex ad punctum datum; tum ejuſdem figuræ veſtigium, angulorumque altitudines invenire.

Data ſit poſitione & magnitudine ſphæra, cujus centrum C, ſemidiameter CE, ſubjectum planum in puncto E contingens, datumque ſit extra ipſam punctum I. Agatur autem per punctum I, centrum C, ac punctum E planum ſectionem faciens in ſphæra circulum AEB, & in ſubjecto plano rectam EK; atque intelligantur ductæ eſſe a puncto I rectæ IA, IB circulum AEB contingentes, junctæque rectæ tum AB, tum CI ipſam AB ſecans in puncto M. Erunt utique anguli ad M uterque recti. Itaque ſi MI manente triangulum AMI circumagatur, quouſque eodem redeat, unde moveri cœpit, punctum A circulum in ſphæra deſcribet per puncta tranſiens A, B, ad quem rectæ omnes pertingent, quæ a puncto I ducuntur ſphæram contingentes, cujuſmodi ſunt IA, IB. Oportet igitur ſphæræ ſegmento, cujus

basis est circulus circa AB descriptus, vertex O, figuram inscribere, atque invenire ejusdem vestigium, & angulorum altitudines.

Ducatur a puncto I recta IK ipsi CE parallela, eademque subjecto plano perpendicularis, & a puncto C recta CY parallela ipsi EK; deinde vero producantur IB, AB ad puncta X, L, rectæque jungantur CA, CB. Quoniam igitur IK magnitudine data est, dataque item magnitudine YK, utpote quæ ipsi CE est æqualis; si ab IK YK auferatur, & quæ relinquitur IY erit magnitudine data. Data est autem magnitudine etiam CY, utpote quæ ipsi EK æqualis est, datusque angulus CYI. Igitur triangulum CYI specie & magnitudine est datum; ideoque data CI, datusque item angulus CIY. Et quoniam in triangulo rectangulo CBI datæ sunt magnitudine tum CB, tum CI, eæ utique datam inter se invicem rationem habebunt. Triangulum igitur CBI specie & magnitudine datum est; ideoque data magnitudine IB, datusque item angulus CIB. At vero datus est angulus CIY. Igitur si minor a majore auferatur, qui relinquitur XIK erit datus. Jam vero cum in triangulo XIK dati sint anguli XKI, KIX, datus erit & tertius IXK, ideoque triangulum XIK datum specie. Data est autem IK magnitudine. Igitur triangulum XIK magnitudine etiam datum est; ideoque XK magnitudine est data. Data est autem magnitudine etiam EK. Igitur EX magnitudine data est. Æqualis est autem EX ipsi XB. Igitur XB magnitudine est data. Et quoniam in triangulo IBM dati sunt anguli BMI, MIB, dataque etiam magnitudine BI, data erit magnitudine BM, datusque item angulus MBI. At vero angulus XBL æqualis est angulo MBI. Igitur & angulus XBL est datus. Datus est autem & angulus BXL, dataque magnitudine BX. Igitur etiam angulus BLX datus est, dataque magnitudine utraque BL, XL. Data est autem magnitudine etiam EX. Igitur & quæ ex iisdem componitur EL magnitudine est data. Atqui data est etiam positione, datumque unum ejus extremum E. Igitur & alterum extremum L datum est. Ducantur modo a punctis A, B rectæ AF, BH ipsi CE parallelæ; & a puncto B recta BV parallela ipsi KE,

per 30. 25. & 26. dat.

per 4. dat.

per cor. 41. dat.

per 1. dat.

per cor. 43. dat.

per 4. dat.

per 40. dat.

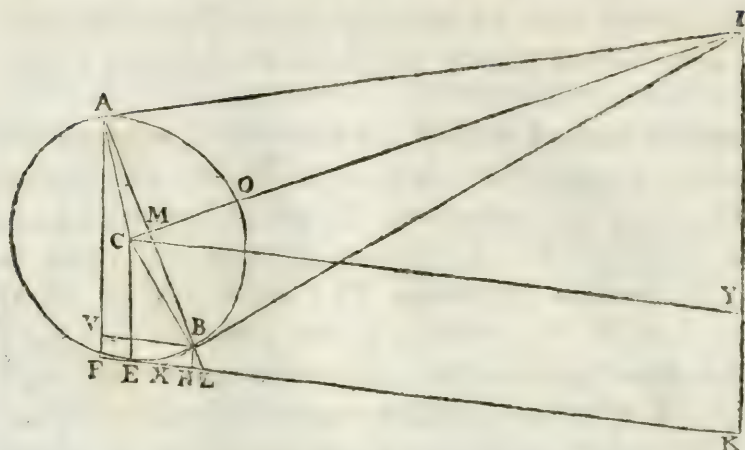
per. cor. ejusd.

per 4. dat.

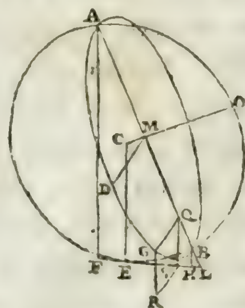
per cor. 40. dat.

per 3. dat.

per 27. dat.



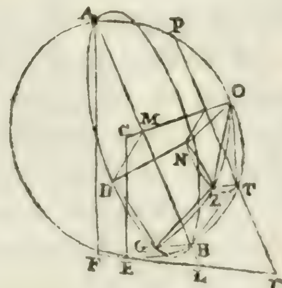
quæ producatur ad F. Quoniam igitur in triangulo AFL dati sunt anguli AFL, ALF, dataque magnitudine AL, utpote quæ componitur ex BL & AB magnitudine datis; ideo data est magnitudine utraque AF, FL. Atqui FL data est etiam positione; datumque unum ejus extremum L. Igitur & alterum extremum F est datum. Porro cum in triangulo AFL, ut AL ad AB, ita
per 1. dat. se habeat FL ad VB, dataque sit ratio ipsius AL ad AB; quippe utraque magnitudine data; ideo data erit etiam ratio ipsius FL
per 2. dat. ad VB. Data est autem magnitudine FL. Data est igitur magnitudine etiam BV; ideoque eidem æqualis FH. Atqui FH data est etiam positione; datumque unum ejus extremum F. Igitur & alterum extremum H est datum.



Adverte nunc animum ad secundam figuram. Quoniam AM magnitudine data est, datus utique erit magnitudine circulus ADB. Itaque si a centro M in circulo ADB ducatur ipsi AB ad rectos angulos recta MD, erit quadrans BD magnitudine datus. Secetur quadrans BD in æquas quot libuerit partes, puta in duas, quarum una sit DG; eritque DG
per 16. dat.
per 30. & data magnitudine. Ducatur autem a puncto G ipsi AB positione
26. dat. datæ perpendicularis recta GQ. Erunt utique GQ, BQ magnitudine

dine datæ. Eadem ratione datæ erunt magnitudine DM, MQ. Ducatur a puncto Q ad FL QS ipsi AF parallela. Et quoniam ut LB ad BQ, ita se habet LH ad HS, ratioque data est, quam habet LB ad BQ, data erit & ratio, quam LH habet ad HS. per 1. dat. Data est autem magnitudine LH, quando data est utraque LF, FH. per 4. dat. Data est igitur magnitudine HS. Atqui data eadem est etiam per 2. dat. positione, datumque unum ejus extremum H. Igitur & alterum extremum S est datum. per 27. dat. Quoniam vero ut LF ad LH, ita se habet AF ad BH, ratioque data est, quam habet LF ad LH, per 1. dat. data erit & ratio, quam AF habet ad BH. Data est autem magnitudine AF. per 2. dat. Data est igitur magnitudine BH. Eodem modo demonstrabitur magnitudine datam esse & ipsam QS. Ducatur modo a puncto S in subjecto plano ipsi GQ æqualis, ipsique FL ad rectos angulos recta SR. Datum utique erit punctum R. per 27. dat. Et quoniam MO plano ADB est ad rectos angulos, & quod per ipsam agitur planum AFL eidem plano ad rectos angulos erit. Igitur GQ ad rectos angulos est plano AFL. Eadem ratione etiam SR ad rectos est angulos eidem plano; ac propterea GQ, RS sunt parallelæ. Sunt autem etiam æquales. Si igitur intelligatur juncta esse recta GR, ea erit ipsi QS parallela & æqualis. At vero QS subjecto plano ad rectos est angulos eademque magnitudine data. Igitur etiam GR ad rectos angulos est eidem plano, eademque data magnitudine. Quod si a puncto D recta ducta esse intelligatur, cujusmodi est GR, eodem modo demonstrabitur, punctum, in quod inciderit, datum esse, rectamque ipsam tum subjecto plano esse ad rectos angulos, tum magnitudine datam.

Denique animum adverte ad figuram tertiam. Agatur per pun-



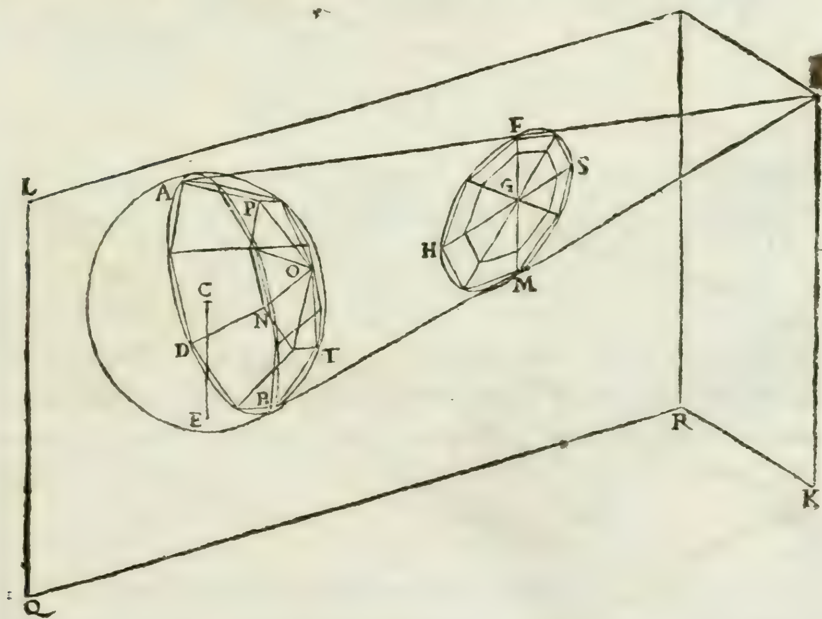
ctum G, rectamque MO planum sectionem faciens in sphæra circulum, cujus quidem circumferentia OZG æqualis similisque est ipsi AO; deinde vero secta AO in æquas quot libet partes veluti in duas AP, PO, per punctum P agatur item planum plano ADB parallelum, quod in sphæra quidem sectionem faciat circulum, cujus est quadrans NZT, in plano vero AFL rectam PΓ. Quoniam igitur per datum punctum P
per 28. dat. ducta est PΓ positione datæ AL parallela, erit PΓ positione data. At vero datus est positione etiam circulus AEB. Igitur pun-
per 25. dat. ctum T, in quo PΓ, AEB sese invicem secant, datum est. Da-
per 26. dat. tum est autem & punctum P. Igitur PT magnitudine est data.
per 4. dat. Eadem ratione PΓ, ideoque etiam ΓT magnitudine est data. Quoniam igitur positione & magnitudine datæ sunt PΓ, ΓT datusque item ad punctum Γ angulus PΓF, utpote qui angulo ALF est æqualis, demonstrabitur, ut in secunda figura, puncta, in quæ incidunt rectæ, quæ a punctis T, Z, N subjecto plano perpendiculares ducuntur, data esse, rectasque item ipsas esse magnitudine datas. Quod si a puncto O ducta esse intelligatur recta circulum AEB contingens ipsique FΓ occurrens, ea utique data erit magnitudine, datumque item punctum, in quo occurrit. Ex quo sequitur datam esse magnitudine rectam, quæ a puncto O ducitur subjecto plano perpendicularis. Itaque si rectæ jungantur BG, GD, TZ, ZN, itemque BT, TO, GZ, ZO, DN, NO: & quæ in quarta segmenti ADBAO parte facta sunt, eadem facta esse intelligantur in tribus reliquis, orietur utique figura ei, quod diximus, segmento inscripta ex trapetiis octo composita, totidemque triangulis inter se invicem æqualibus. Cujus figuræ vestigium erit datum, una cum angulorum altitudinibus.

Data igitur sphæra positione & magnitudine; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

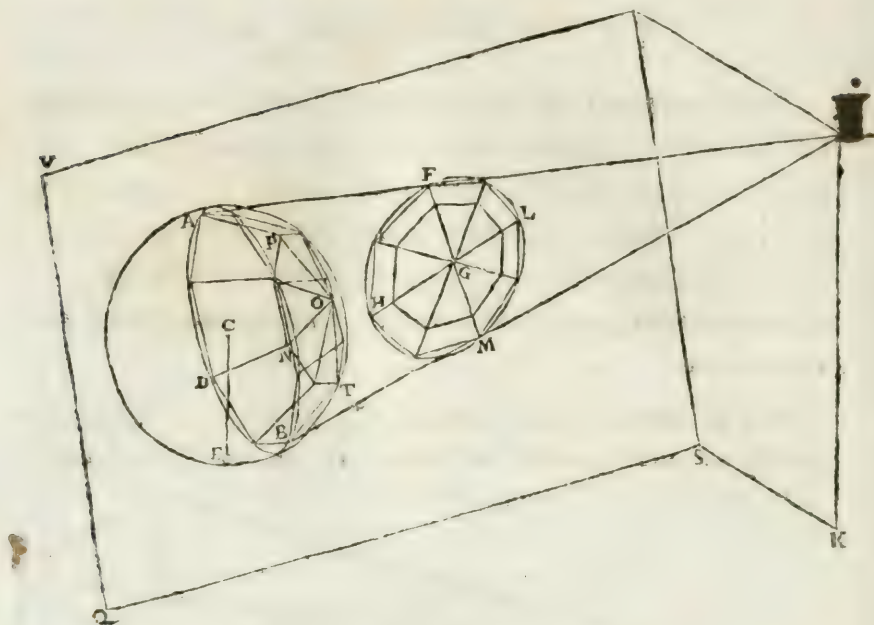
PROPOSITIO XIX.

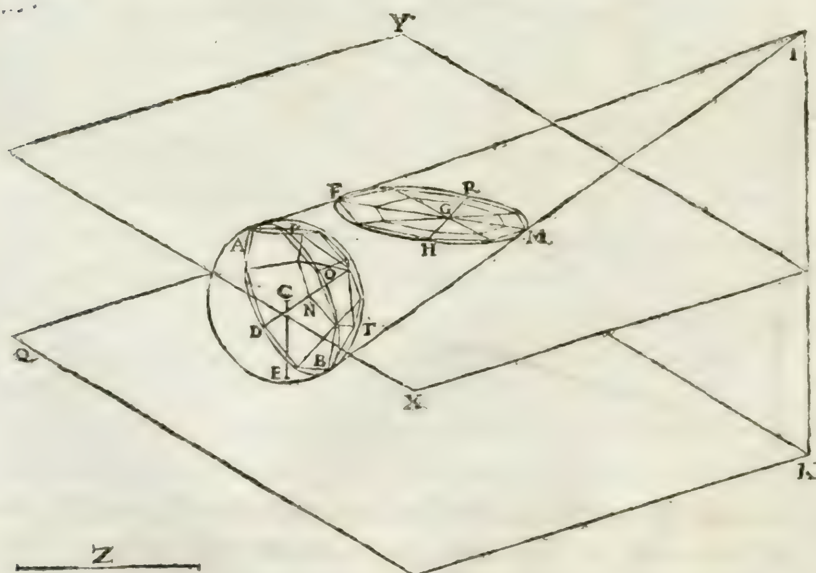
Data poſitione & magnitudine ſphæra ultra planum ad ſubjectum planum utcunque ſe habens, ſive illud perpendiculare fuerit, ſive inclinatum, ſive parallelum poſitione datum, datoque citra idem puncto aliquo, ſphæræ ſcenographiam tum concurrentem conficere, tum concurrentem procumbentemque, tum concurrentem horizontalem.

Data ſit ſphæra, cujus centrum C, ſemidiameter CE, ultra planum aliquod utcunque ſe habens ad planum QK, quod ea



contingit in puncto E, ſive illud perpendiculare ſit, ut LR, ſive inclinatum, ut VS, ſive parallelum, ut YX, diſtans a QK intervallo Z; datumque ſit citra hujuſmodi planum punctum I. Oportet conficere ſphæræ, quam diximus, ſcenographiam tum concurrentem, tum concurrentem procumbentemque, tum concurrentem horizontalem.





Sit ADBAO sphæræ segmentum, cujus basis est circulus ADBA, ad quem rectæ omnes pertingunt sphæram a puncto I contingen-

tes, cujuſmodi ſunt AI, BI; vertex punctum O. Inſcribatur autem ſegmento ADBAO figura ADBAPNTPO, inveniaturque ejus veſtigium, atque angulorum altitudines; deinde vero figuræ ADBAPNTPO ſcenographiæ, in ſuo quæque plano, conficiantur, eæque ſint in plano quidem LR, ſcenographia concurrens FHMSFG; in plano vero VS, ſcenographia concurrens procumbenſque FHMLFG; denique in plano YX, ſcenographia concurrens horizontalis FHMRFG. Hoc autem quomodo fiat ſuo loco demonſtratum eſt. Erunt utique eædem hæ, per petitionem ſuperiori Propoſitioni præmiſſam, ſcenographiæ tum concurrens, tum concurrens procumbenſque, tum concurrens horizontalis ſegmenti ADBAO, ſive ſphæræ; cujus centrum C, ſemidiameter CE. per ſup. prop.

Data igitur poſitione & magnitudine ſphæra; & quæ ſequuntur. Quod oportebat facere.

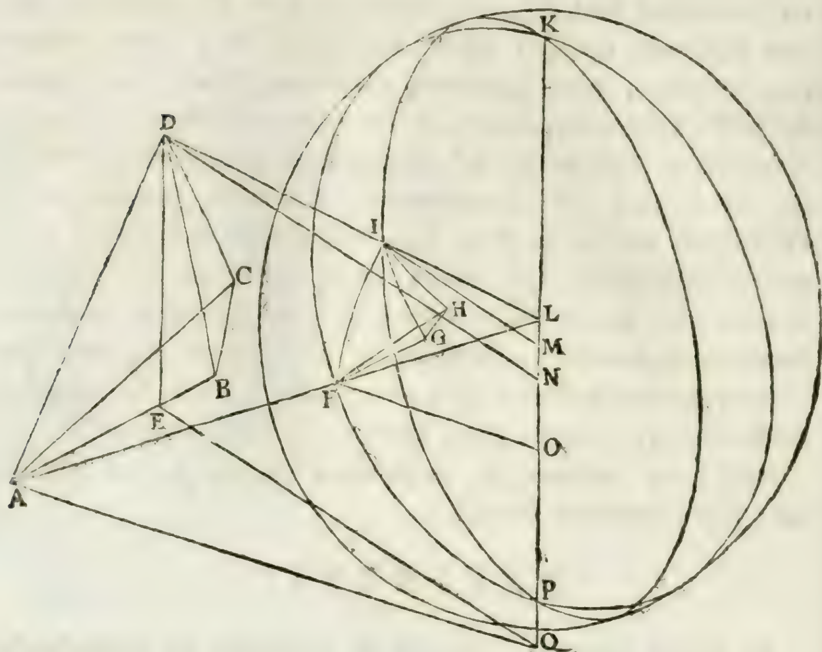
DEFINITIO.

Si fuerit ſphæra; dataque ſit poſitione & magnitudine ultra concavam ejus ſuperficiem figura aliqua ſolida; ducanturque ab ejus angulis ad ſphæræ centrum rectæ lineæ; quæ oritur delineatio e communibus ſectionibus ſphæræ ac triangulorum, quorum unumquodque baſim habet unum figuræ latus, verticem id quod diximus centrum, figuræ ejuſdem SPHÆRICA ORTHOGRAPHIA vocetur.

PROPOSITIO XX.

Data poſitione & magnitudine ultra concavam ſphæræ ſuperficiem pyramide triangularem baſim habente, ejuſdem ſphæricam orthographiam conficere.

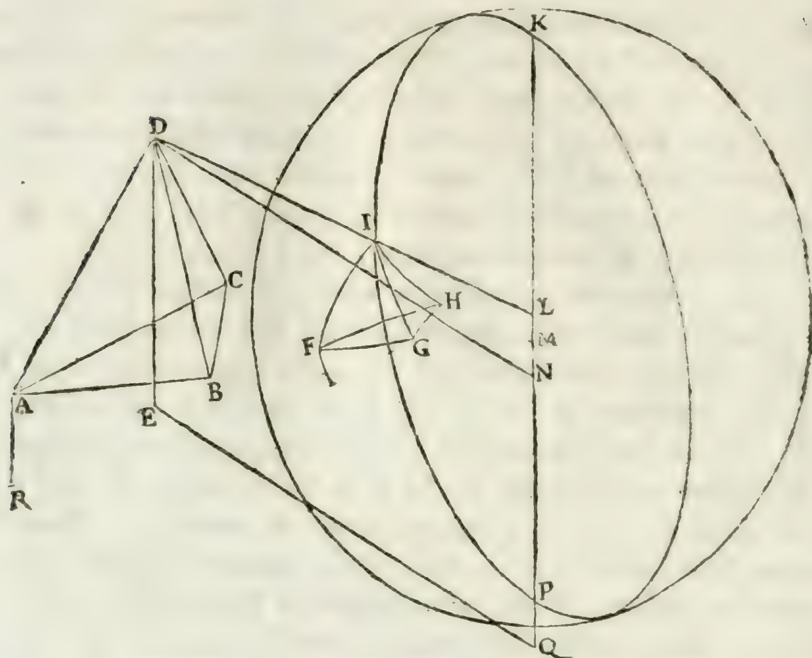
Data ſit poſitione & magnitudine ultra concavam ſuperficiem ſphæræ, cujus centrum L, diameter KP, pyramis ABCD, cujus ſit baſis triangulum ABC, vertex D. Oportet conficere ſphæricam orthographiam pyramidis ABCD.



Sit primo basis ABC in subjecto plano. Inveniantur vestigium
per 1.prop. pyramidis ABCD, & altitudo anguli D; idest puncta A, B, C, E, rectaque DE. Ducatur autem a puncto L subjecto plano perpendicularis recta LQ; deinde vero per LQ, punctumque A agatur planum sectionem faciens in sphæra circulum FKP, atque in subjecto plano rectam AQ; junctaque AL, per punctum F ducatur FO parallela ipsi AQ. Quoniam igitur triangulum ALQ
per. 30. 25. & 26. dat. angulum habet LQA datum, datasque circa illum magnitudine LQ,
per cor. 41. dat. QA, erit utique data magnitudine etiam AL. Data est autem magnitudine etiam LF, utpote quæ sphæræ semidiametro est æqualis.
per 1. dat. Igitur ratio data est, quam AL habet ad LF. At vero ut AL ad LF, ita se habet QL ad LO. Igitur data est etiam ratio, quam QL habet ad LO. Data est autem magnitudine QL. Data
per 2. dat. est igitur magnitudine etiam LO. Atqui data eadem est & posi-
per 28. dat. tione, datumque unum ejus extremum L. Igitur & alterum O
per 27. dat. est datum. Quoniam vero ut AL ad LF, ita se habet AQ ad FO, eadem ratione data erit magnitudine ipsa FO. Atqui data

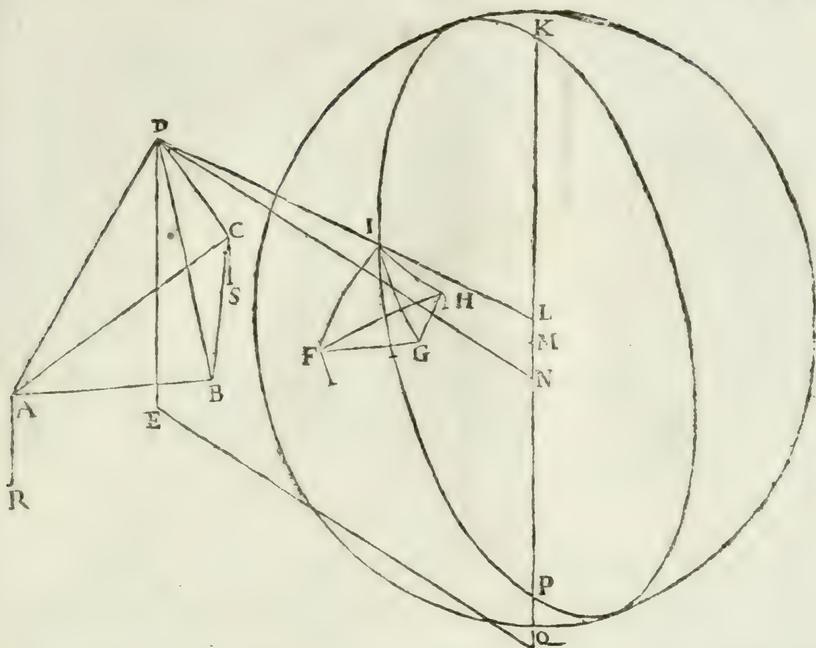
eadem eſt & poſitione, datumque unum ejus extremum O. Igitur & alterum F eſt datum. Iiſdem confectis, ad puncta quod attinet B, C, eodem modo demonſtrabitur puncta G, H data eſſe. Agatur modo per rectas LQ, DE planum ſectionem faciens in ſphæra circulum PKI, atque in ſubjecto plano rectam QE; junctaque DL, ducantur a punctis D, I rectæ DN, IM parallelæ ipſi QE. Et quoniam utraque LQ, DE magnitudine data eſt, erit utique data magnitudine etiam LN. Data eſt autem magnitudine etiam DN, utpote quæ ipſi QE eſt æqualis; datuſque angulus DNL. Igitur ipſa etiam DL magnitudine eſt data. Quoniam igitur ut DL ad LI, ita ſe habet tum LN ad LM, tum DN ad IM, demonſtrabitur, ut ſupra, punctum I datum eſſe. Itaque per data duo puncta F & G; G & H; H & F; F & I; G & I; H & I deſcribantur circuli maximi. Erunt utique circumferentiæ FG, GH, HF; itemque FI, GI, HI communes ſectiones ſphæræ ac triangulorum LAB, LBC, LAC, LAD, LBD, LCD. Ac pyramidis ABCD latus AB eſt baſis trianguli LAB; latus BC baſis trianguli LBC; latus AC baſis trianguli LAC; latus AD baſis trianguli LAD; latus BD baſis trianguli LBD; latus CD baſis trianguli LCD. Quæ autem oritur delineatio ex hujuſmodi ſectionibus, figuræ ſphærica orthographia vocatur. Igitur delineatio FGHI ſphærica orthographia eſt pyramidis ABCD.

per 28. dat.
per 27. dat.
per 4. dat.
per cor. 41. dat.
per 20. l. 1. ſphæric.



At vero basis ABC latus BC sit in subjecto plano. Inveniantur vestigium pyramidis ABCD, & altitudines angulorum D, A; idest puncta B, C, E, R, rectæque DE, AR; describaturque figura. Eodem, quo supra, modo demonstrabitur delineationem FGHI esse sphæricam orthographiam pyramidis ABCD.

Sic



Sit denique pyramidis ABCD angulus B in ſubjecto plano. Inveniantur veſtigium pyramidis ABCD, & altitudines angulorum D, A, C; ideſt puncta B, E, R, S, rectæque DE, AR, CS; deſcribaturque figura. Eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur delineationem FGHI eſſe ſphæricam orthographiam pyramidis ABCD.

Data igitur poſitione & magnitudine; & quæ ſequuntur. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXI.

Si in prima figura ſuperioris Propoſitionis ſumatur in AQ recta QX æqualis ipſi OF; quæ recta ducitur a puncto X ſubjecto plano ad rectos angulos, ea per punctum F tranſibit. Item ſi in EQ ſumatur recta QY ipſi IM æqualis; quæ recta a puncto Y ſubjecto plano ad rectos angulos ducitur, ea tranſibit per punctum I.

Si enim recta, quæ a puncto X ducitur subjecto plano ad rectos angulos, quæ quidem erit in plano AQL, per punctum F non transit, ea secet rectam AL in puncto T, ut XT. Quoniam igitur rectæ XT, QL uni eidemque plano ad rectos sunt angulos, hæ utique erunt inter se invicem parallelæ, idcirco in triangulo ALQ ut AX ad XQ, ita se habet AT ad TL. Et componendo, ut AQ ad QX, ita se habet AL ad LT; æqualis est autem QX ipsi FO. Igitur ut AQ ad FO, ita se habet AL ad LT. Ut autem AQ ad FO, ita etiam se habet AL ad LF. Igitur LT æqualis est ipsi LF, major minori; quod fieri non potest. Non igitur recta XT secat rectam AL in puncto T. Sed neque in alio quovis, præterquam in F. Igitur recta XT transit per punctum F. Quod erat unum. Jam vero recta, quæ a puncto Y subjecto plano ad rectos angulos ducitur, quæ quidem erit in plano DEQL, non transeat per punctum I, sed secet rectam DL in puncto V, ut YV. Quoniam igitur rectæ YV, QL uni eidemque plano ad rectos sunt angulos, erunt hæ utique inter se in-

vicem parallelæ; parallela eſt autem DN ipſi QY. Igitur YZNQ eſt parallelogrammum, ideoque ZN æqualis ipſi QY. Et quoniam in triangulo DNL recta ZV parallela eſt ipſi NL, ut DZ ad ZN, ita ſe habebit DV ad VL. Et componendo, ut DN ad NZ, ita ſe habebit DL ad LV; æqualis eſt autem NZ ipſi IM, quippe utraque æqualis eſt ipſi QY. Igitur ut DN ad IM, ita ſe habet DL ad LV. Ut autem DN ad IM, ita etiam ſe habet DL ad LI. Igitur LV æqualis eſt ipſi LI, major minori; quod fieri non poteſt. Non igitur recta YV ſecat rectam DL in puncto V. Sed neque in alio quovis, præterquam in I. Igitur recta YV tranſit per punctum I. Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

Quoniam recta QX parallela eſt & æqualis ipſi FO, tum QY ipſi IM, erit utraque XF, YI æqualis altera quidem ipſi QO, altera vero ipſi QM utrique magnitudine datæ, utpote reliquæ, ſi ab LQ auferatur recta LO, itemque LM. Ex quo manifeſtum eſt puncta F, I delineationis FGHI aliter inveniri poſſe, atque illa in Propoſitione viceſima inventa ſint.

DEFINITIO.

Si fuerit ſphæra; dataque ſit poſitione & magnitudine ultra concavam ejus ſuperficiem figura aliqua ſolida; ducanturque ab ejus angulis ad punctum citra eandem ſuperficiem datum, quod non ſit ſphæræ centrum, rectæ lineæ; quæ oritur delineatio e communibus ſectionibus ſphæræ, ac triangulorum, quorum unumquodque baſim habet unum figuræ latus, verticem punctum datum, figuræ ejuſdem SPHÆRICA SCENOGRAPHIA CONCURRENS vocetur.

PROPOSITIO XXII.

Data poſitione & magnitudine ultra concavam ſphæræ ſuperficiem pyramide triangularem baſim habente, datoque citra eandem ſuperficiem puncto aliquo, quod non ſit ſphæræ centrum, ejuſdem ſphæricam ſcenographiam concurrentem conficere.

Data ſit poſitione & magnitudine ultra concavam ſuperficiem ſphæræ, cujus centrum R, diameter KP, pyramis ABCD, cujus ſit baſis triangulum ABC, vertex D. Datum autem ſit citra eandem ſuperficiem punctum L. Oportet conficere ſphæricam ſcenographiam concurrentem pyramidis ABCD.

Sit primo baſis ABC in ſubjecto plano. Inveniantur veſtigium
per 1.prop. pyramidis ABCD, & altitudo anguli D; ideſt puncta A, B, C, E, rectaque DE. Ducatur autem a puncto L recta linea ſubje-

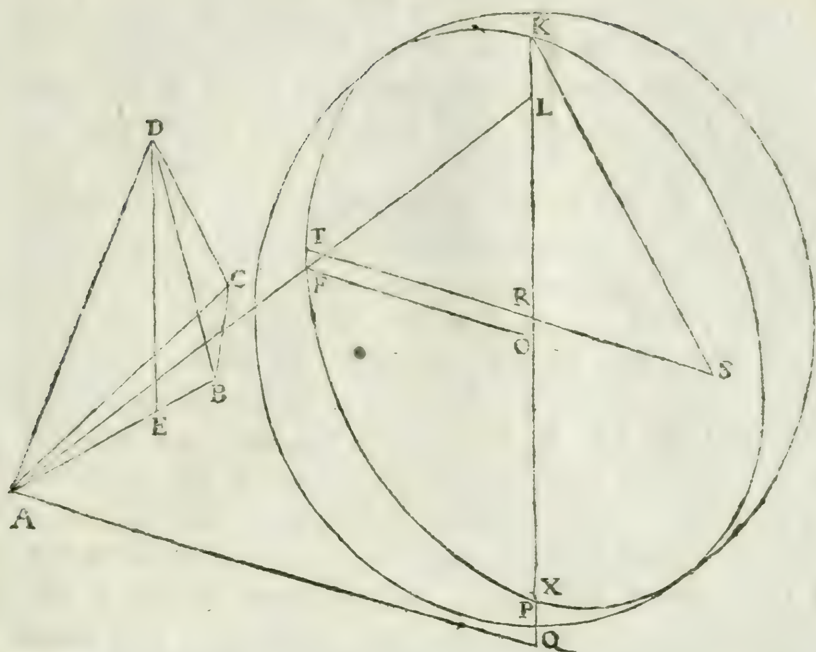
cto plano perpendicularis, quæ quidem five incidet in centrum R, five non incidet. Incidat primo in centrum R, ut LQ; agaturque per ipsam & punctum A planum sectionem faciens in sphæra circulum TKP, atque in subjecto plano rectam AQ; ducaturque a centro R recta RT ipsi AQ parallela. Erit utique rectangulum, quod sub LQ ac TR continetur, æquale rectangulo, quod continetur sub RL & AQ, sive eodem majus, minusve. Itaque recta jungatur AL: & si quidem æquale fuerit, ea per punctum T transibit; sin autem majus, cadet infra ipsum; si denique minus, cadet supra. Transeat primo AL per punctum T. Et quoniam rectæ LR extrema L & R positione data sunt, erit utique LR positione & magnitudine data. At vero AL per 26. dat.

cadat infra punctum T, puta in F, ducaturque per F FO parallela ipsi AQ: deinde vero sumpta in TR producta RS ipsi LR æquali, jungatur KS. Quoniam igitur quadratum, quod ab LO describitur, æquale est quadratis, quæ describuntur ab LR, RO, & duplo rectanguli, quod continetur sub LR, RO; qua-

dratumque, quod describitur ab FO, æquale rectangulo, quod continetur sub KO, OP; erit utique quadratum, quod describitur ab LF, æquale quadratis, quæ describuntur ab LR, RO, & duplo rectanguli, quod continetur sub LR, RO, & adhuc rectangulo, quod continetur sub KO, OP. At vero quadratum, quod describitur ab RO, una cum rectangulo, quod continetur sub KO, OP, æquale est quadrato, quod describitur a KR. Igitur quadratum, quod describitur ab LF, æquale est quadratis, quæ describuntur ab LR, KR, sive quadrato, quod describitur a KS, & duplo rectanguli, quod continetur sub LR, & RO. Quoniam igitur ut quadratum, quod ab LF describitur, ad quadratum, quod describitur ab FO, ita se habet quadratum, quod ab LA describitur, ad quadratum, quod describitur ab AQ; se habebit utique quadratum, quod describitur a KS, una cum duplo rectanguli, quod continetur sub LR, RO, ad rectangulum, quod continetur sub KO, OP, ut quadratum, quod ab LA describitur, ad quadratum, quod describitur ab AQ. Fiat modo ut KS ad duplam ipsius LR, ita RO ad K; & ut KS ad KO, ita OP ad L. Atque erit rectangulum, quod sub KS & K continetur, æquale rectangulo, quod continetur sub dupla ipsius LR, & RO; & rectangulum, quod sub KS & L continetur, æquale rectangulo, quod continetur sub KO, OP. Igitur quadratum, quod describitur a KS, una cum rectangulo, quod continetur sub KS & K, ad rectangulum, quod continetur sub KS & L, sive recta composita ex KS & K, ad L ita se habet, ut quadratum, quod ab LA describitur, ad quadratum, quod describitur ab AQ, sive ut LA ad H; nimirum si fiat ut LA ad AQ, ita AQ ad H. Et permutando, ut recta composita ex KS & K ad LA, ita se habet L ad H, aut sumpta KS communi altitudine, rectangulum, quod sub KS & L continetur, ad rectangulum, quod continetur sub KS & H. Fiat modo ut LA ad KS, ita tum L ad M, tum H ad N. Atque erit rectangulum, quod sub LA & M continetur, æquale rectangulo, quod continetur sub KS & L; & rectangulum, quod sub LA & N continetur, æquale rectangulo, quod continetur sub KS & H. Igitur ut æ-

cta composita ex KS & K ad LA, ita se habet rectangulum, quod sub LA & M continetur, ad rectangulum, quod continetur sub LA & N, sive ut M ad N; ideoque rectangulum, quod continetur sub KS & N, una cum rectangulo, quod continetur sub K & N, æquale est rectangulo, quod continetur sub LA & M. Æquale est autem hoc rectangulum rectangulo, quod continetur sub KS & L, atque hoc ipsum rectangulo æquale, quod continetur sub KO & OP. Igitur rectangulum, quod continetur sub KS & N, una cum rectangulo, quod continetur sub K & N, æquale est rectangulo, quod continetur sub KO & OP. Addatur ab utraque parte quadratum, quod describitur ab RO. Erit utique rectangulum, quod continetur sub KS & N, una cum rectangulo, quod continetur sub K & N, & quadrato, quod describitur ab RO, æquale rectangulo, quod continetur sub KO & OP, una cum quadrato, quod describitur ab RO; hoc est quadrato, quod describitur a KR. Fiat modo ut LA ad duplam ipsius LR, ita H ad P. Atque erit rectangulum, quod sub LA &

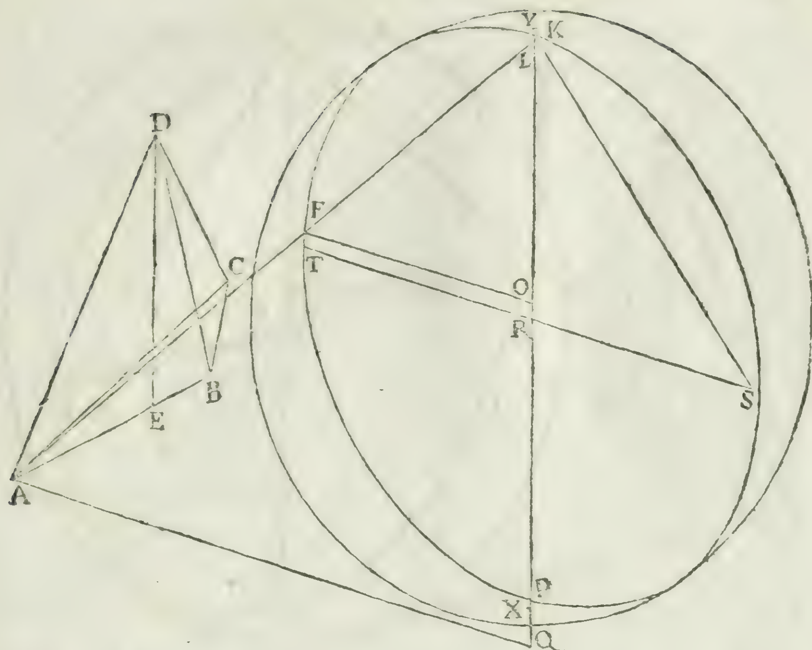
P continetur, æquale rectangulo, quod continetur ſub dupla ipſius LR & H. Quoniam vero ut KS ad duplam ipſius LR, ita ſe habet RO ad K; utque LA ad KS, ita H ad N; ſe habebit utique rectangulum, quod ſub LA & KS continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub dupla ipſius LR & KS, ſive LA ad duplam ipſius LR, ut rectangulum, quod ſub RO & H continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub K & N. Ut autem LA ad duplam ipſius LR, ita ſe habet, ſumpta H communi altitudine, rectangulum, quod ſub LA & H continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub dupla ipſius LR & H; ſive rectangulum eidem æquale, quod continetur ſub LA & P. Igitur rectangulum, quod ſub LA & H continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub LA & P, ſive H ad P, ita ſe habet, ut rectangulum, quod ſub H & RO continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub K & N. Ut autem H ad P, ita ſe habet, ſumpta RO communi altitudine, rectangulum, quod ſub H & RO continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub P & RO. Igitur rectangulum, quod ſub H & RO continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub P & RO, ita ſe habet ut rectangulum, quod ſub H & RO continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub K & N; ac propterea rectangulum, quod continetur ſub P & RO, æquale eſt rectangulo, quod continetur ſub K & N. Quoniam igitur demonſtratum eſt rectangulum, quod continetur ſub KS & N, una cum rectangulo, quod continetur ſub K & N, & quadrato, quod deſcribitur ab RO, æquale eſſe quadrato, quod deſcribitur a KR; erit utique rectangulum, quod continetur ſub KS & N, una cum rectangulo, quod continetur ſub P & RO, & quadrato, quod deſcribitur ab RO, æquale quadrato, quod deſcribitur a KR. Itaque fiat ut KS ad V, ita V ad N; deinde ſumpa in RP RX ipſi V æquali, auferatur ab altera quidem parte rectangulum, quod continetur ſub KS & N, ab altera vero quadratum, quod deſcribitur ab RX. Hoc enim fieri poteſt, quando quadratum, quod deſcribitur a KR, major eſt rectangulo, quod continetur ſub KS & N, ut infra demonſtrabitur. Atque erit rectangulum, quod continetur ſub P & RO,



& RO, una cum quadrato, quod deſcribitur ab RO, æquale exceſſui, quo quadratum, quod deſcribitur ab RP, excedit quadratum, quod deſcribitur ab RX. At vero rectangulum, quod continetur ſub P & RO, una cum quadrato, quod deſcribitur ab RO, æquale eſt rectangulo, quod continetur ſub recta compoſita ex P & RO, ipſaque RO; atque exceſſus, quo quadratum, quod deſcribitur ab RP, excedit quadratum, quod deſcribitur ab RX, æqualis rectangulo, quod continetur ſub KX & XP. Igitur rectangulum, quod continetur ſub recta compoſita ex P & RO, ipſaque RO, æquale eſt rectangulo, quod continetur ſub KX & XP. Quoniam igitur duæ rectæ, compoſita ex P & RO, ipſaque RO, datum ſpatium comprehendunt; nempe rectangulum, quod continetur ſub KX & XP; earumque altera altera major eſt data P; & ipſarum utraque data erit. Data eſt autem LR. Igitur LO magnitudine eſt data. Cadat denique AL ſupra punctum

per. 1. 2. & 4. dat.
per 1. & 2. dat.
per 84. dat.
per 3. dat.

T, puta in F; ducaturque per F FO parallela ipsi AQ; deinde vero sumpta in TR producta RS ipsi LR æquali, jungatur KS. Quoniam igitur quadrata, quæ describuntur ab LR & RO, æqualia sunt duplo rectanguli, quod continetur sub LR & RO, una cum quadrato, quod describitur ab LO; & rectangulum, quod continetur sub KO & OP, æquale est quadrato, quod describitur ab FO; erit utique quadratum, quod describitur a KS, æquale duplo rectanguli, quod continetur sub LR & RO, una cum quadrato, quod describitur ab LF. Et ablato ab utraque parte duplo hujus, quod diximus, rectanguli, erit excessus, quo quadratum, quod describitur a KS, excedit duplum rectanguli, quod continetur sub LR & RO, æqualis quadrato, quod describitur ab LF. Quoniam igitur ut quadratum, quod ab FO describitur, ad quadratum, quod describitur ab LF, ita se habet quadratum, quod ab AQ describitur, ad quadratum, quod describitur ab LA; se habebit utique rectangulum, quod continetur sub KO & OP, ad excessum, quo quadratum, quod describitur a KS, excedit duplum rectanguli, quod continetur sub LR & RO, ut quadratum, quod ab AQ describitur, ad quadratum, quod describitur ab LA. Fiat modo ut KS ad duplam ipsius LR, ita RO ad K; & ut KS ad KO, ita OP ad L. Atque erit rectangulum, quod sub KS & K continetur, æquale rectangulo, quod continetur sub dupla ipsius LR & RO; & rectangulum, quod sub KS & L continetur, æquale rectangulo, quod continetur sub KO & OP. Igitur rectangulum, quod continetur sub KS & L, ad excessum, quo quadratum, quod a KS describitur, excedit rectangulum, quod continetur sub KS & K, sive L ad excessum, quo KS ipsam K excedit, ita se habet ut quadratum, quod ab AQ describitur, ad quadratum, quod describitur ab LA, sive ut H ad LA; nimirum si fiat ut LA ad AQ, ita AQ ad H. Et permutando, L ad H, aut sumpta KS communi altitudine, rectangulum, quod sub KS & L continetur, ad rectangulum, quod continetur sub KS & H, ita se habet ut excessus, quo KS ipsam K excedit, ad LA. Fiat modo ut LA ad KS, ita tum L ad M, tum H ad N. Atque erit rectangulum, quod sub LA & M continetur,

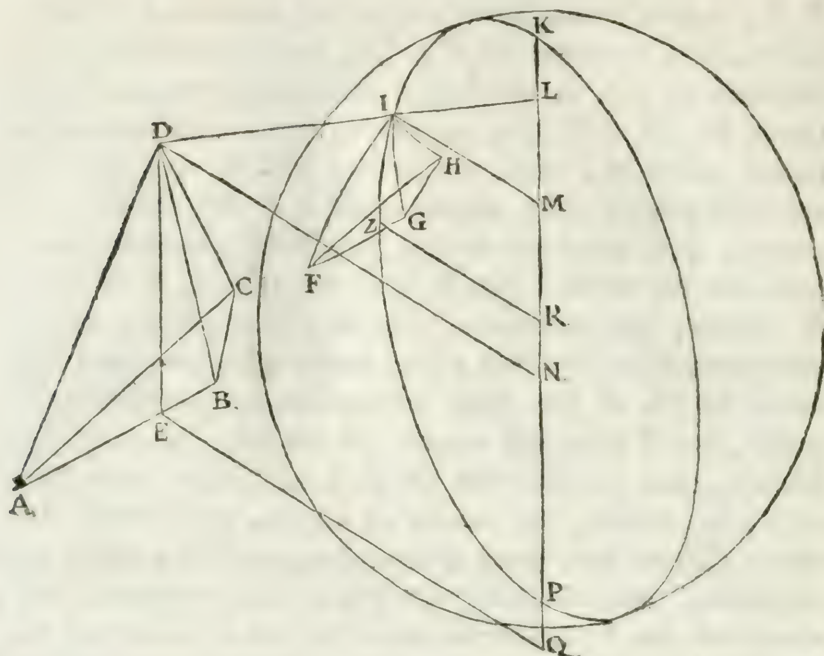


æquale rectangulo, quod continetur ſub KS & L; & rectangulum, quod ſub LA & N continetur, æquale rectangulo, quod continetur ſub KS & H. Igitur ut rectangulum, quod ſub LA & M continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub LA & N, ſive M ad N, ita ſe habet exceſſus, quo KS ipſam K excedit, ad LA; ideoque rectangulum, quod ſub LA & M continetur, æquale eſt exceſſui, quo rectangulum, quod ſub KS & N continetur, excedit rectangulum, quod continetur ſub K & N. Æquale eſt autem rectangulum, quod ſub LA & M continetur, rectangulo, quod continetur ſub KS & L, atque hoc ipſum rectangulo æquale, quod continetur ſub KO & OP. Igitur rectangulum, quod continetur ſub KO & OP, æquale eſt exceſſui, quo rectangulum, quod ſub KS & N continetur, excedit rectangulum, quod continetur ſub K & N. Addantur ab utraque parte quadratum, quod deſcribitur ab RO, & rectangulum, quod continetur ſub K & N. Erit utique rectangulum, quod continetur ſub KO & OP, una cum quadrato, quod deſcribitur ab RO; hoc eſt quadratum, quod deſcribitur a KR, una cum re-

ctangulo, quod continetur ſub K & N, æquale rectangulo, quod continetur ſub KS & N, quadratoque, quod deſcribitur ab RO. Fiat modo ut LA ad duplam ipſius LR, ita H ad P: eodemque, quo ſupra, modo demonſtrabitur rectangulum, quod ſub P & RO continetur, æquale eſſe rectangulo, quod continetur ſub K & N. Igitur quadratum, quod deſcribitur a KR, una cum rectangulo, quod continetur ſub P & RO, æquale eſt rectangulo, quod continetur ſub KS & N, quadratoque, quod deſcribitur ab RO. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod deſcribitur ab RO, quadratum, quod deſcribitur a KR, una cum exceſſu, quo rectangulum, quod continetur ſub P & RO, excedit quadratum, quod deſcribitur ab RO, æquale eſt rectangulo, quod continetur ſub KS & N. Itaque fiat ut KS ad V, ita V ad N; deinde vero productis RP, RK ad X, Y, ita ut earum utraque ipſi V æqualis ſit, auferatur ab utraque parte quadratum, quod deſcribitur a KR. Hoc enim fieri poteſt; quando quadrato, quod deſcribitur a KR, majus eſt rectangulum, quod continetur ſub KS

& N, ut infra demonſtrabitur. Atque erit exceſſus, quo rectangulum, quod continetur ſub P & RO, excedit quadratum, quod deſcribitur ab RO, æqualis exceſſui, quo rectangulum, quod continetur ſub KS & N, ſive quadratum, quod ab YR deſcribitur, excedit quadratum, quod deſcribitur a KR. At vero exceſſus, quo rectangulum, quod continetur ſub P & RO, excedit quadratum, quod deſcribitur ab RO, æqualis eſt rectangulo, quod continetur ſub exceſſu, quo P ipſam RO excedit, & ſub RO; & exceſſus, quo quadratum, quod ab YR deſcribitur, excedit quadratum, quod deſcribitur a KR, æqualis rectangulo, quod continetur ſub YK & KX. Igitur rectangulum, quod continetur ſub exceſſu, quo P ipſam RO excedit, & ſub RO, æquale eſt rectangulo, quod continetur ſub YK & KX. Quoniam igitur duæ rectæ; ea ſcilicet, quæ exceſſui eſt æqualis, quo P ipſam RO excedit, ipſaque RO; datum ſpatium comprehendunt, nempe rectangulum, quod continetur ſub YK & KX, earumque ſimul utraque eſt data P; & ipſarum unaquæque data erit. Data eſt autem LR. Igitur LO magnitudine eſt data. Quoniam igitur in figura prima data eſt ratio, quam LQ habet ad LR; & ut LQ ad LR, ita ſe habet AQ ad RT; data utique erit & ratio, quam habet AQ ad RT. Data eſt autem magnitudine AQ. Data eſt igitur magnitudine etiam RT. Atqui data eadem eſt & poſitione, datumque unum ejus extremum R. Igitur & alterum T eſt datum. Haud ſecus in figura ſecunda ac tertia de puncto F argumentabimur. Porro iiſdem confectis, ad puncta quod attinet B,

per 1. 2. 4. & 3. dat.
per 1. & 2. dat.
per 85. dat.
per 4. dat.
per 2. dat.
per 28. dat.
per 27. dat.

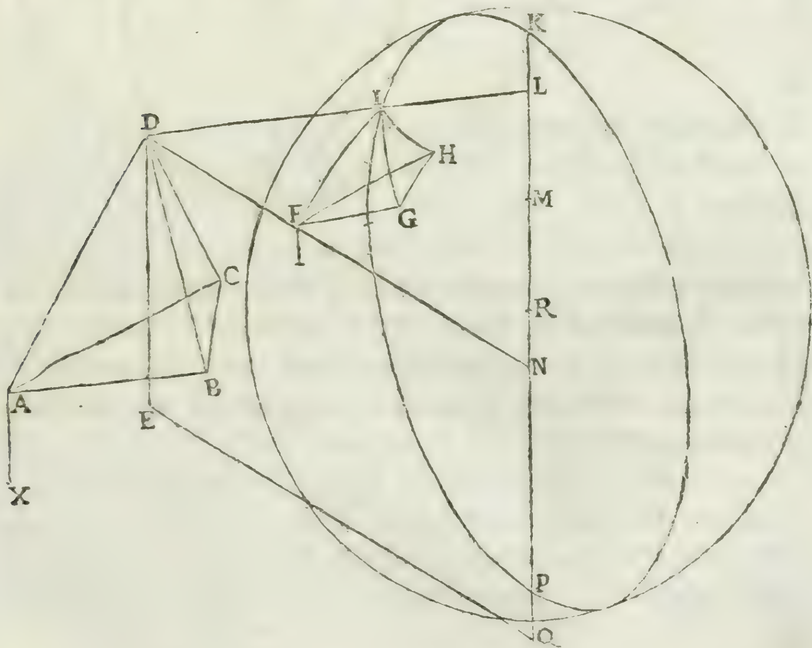


C, eodem modo demonſtrabitur puncta G, H data eſſe. Agatur modo per rectas LQ, DE planum ſectionem faciens in ſphæra circulum IKP, atque in ſubjecto plano rectam QE; ducaturque a puncto D ipſi EQ parallela recta DN: eritque DN magnitudine data, utpote quæ ipſi QE eſt æqualis. Et quoniam utraque LQ, DE magnitudine data eſt, erit utique data magnitudine etiam LN. Ducatur a centro R ad circuli IKP circumferentiam recta RZ parallela ipſi EQ. Sane rectangulum, quod ſub LN ac ZR continetur, rectangulo erit æquale, quod continetur ſub RL & DN, ſive eodem majus, minuſve. Itaque recta jungatur DL: & ſi quidem æquale fuerit, ea per punctum Z tranſibit; ſin autem majus, cadet infra ipſum; ſi denique minus, cadet ſupra. Horum trium quodcumque accidat, ducta a puncto, cujuſmodi eſt I, recta IM ipſi EQ parallela, demonſtrabitur, ut ſupra, rectam LM, quæ inter datum punctum L, ipſamque IM interjicitur, magnitudine datam eſſe. Data eſt autem magnitudine etiam LN. Igitur data eſt ratio, quam LN habet ad LM. Et quoniam ut

per 4. dat.

LN ad LM, ita ſe habet DN ad MI, demonſtrabitur, ut ſupra, punctum I datum eſſe. Itaque per data duo puncta F & G; G & H; H & F; F & I; G & I; H & I circuli in ſphæræ ſuperficie deſcribantur, ita ut id planum, in quo unuſquiſque eſt, per punctum L tranſeat. Hoc autem qui fieri poſſit infra demonſtrabitur. Erunt utique circumferentiæ FG, GH, HF, itemque FI, GI, HI communes ſectiones ſphæræ, ac triangulorum LAB, LBC, LAC, LAD, LBD, LCD. Ac pyramidis ABCD latus AB eſt baſis trianguli LAB; latus BC baſis trianguli LBC; latus AC baſis trianguli LAC; latus AD baſis trianguli LAD; latus BD baſis trianguli LBD; latus CD baſis trianguli LCD. Quæ autem oritur delineatio ex hujuſmodi ſectionibus, figuræ ſphærica ſcenographia concurrens vocatur. Igitur delineatio FGHI ſcenographia ſphærica concurrens eſt pyramidis ABCD.

At vero baſis ABC latus BC ſit in ſubjecto plano. Invenian-

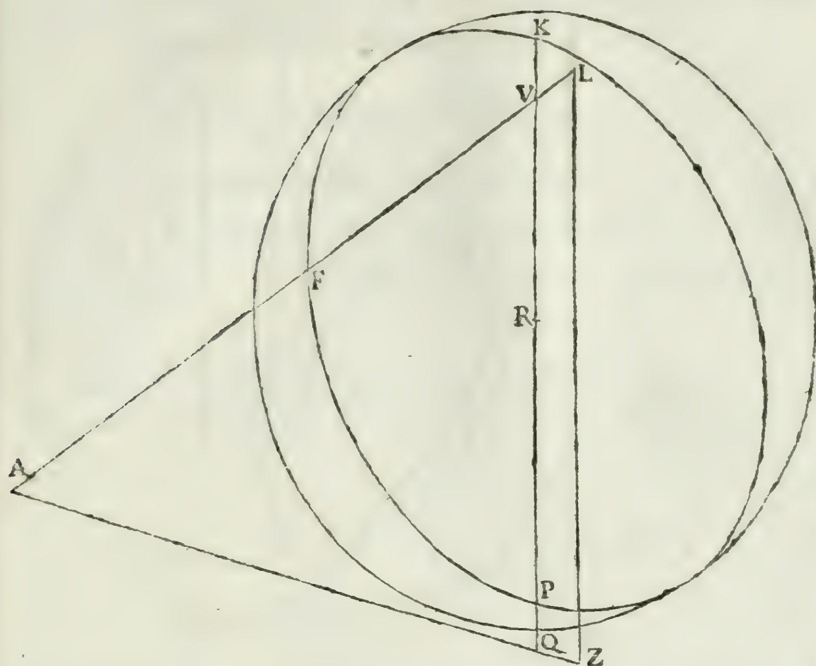


tur veſtigium pyramidis ABCD, & altitudines angulorum D, A; ideſt puncta B, C, E, X, rectæque DE, AX; deſcribaturque

figura. Eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur delineationem FGHI eſſe ſphæricam ſcenographiam concurrentem pyramidis ABCD.

Sit denique pyramidis ABCD angulus B in ſubjecto plano. Inveniantur veſtigium pyramidis ABCD, & altitudines angulorum D, A, C; ideſt puncta B, E, X, Y, rectæque DE, AX, CY; deſcribaturque figura. Eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur delineationem FGHI eſſe ſphæricam ſcenographiam concurrentem pyramidis ABCD.

Quod



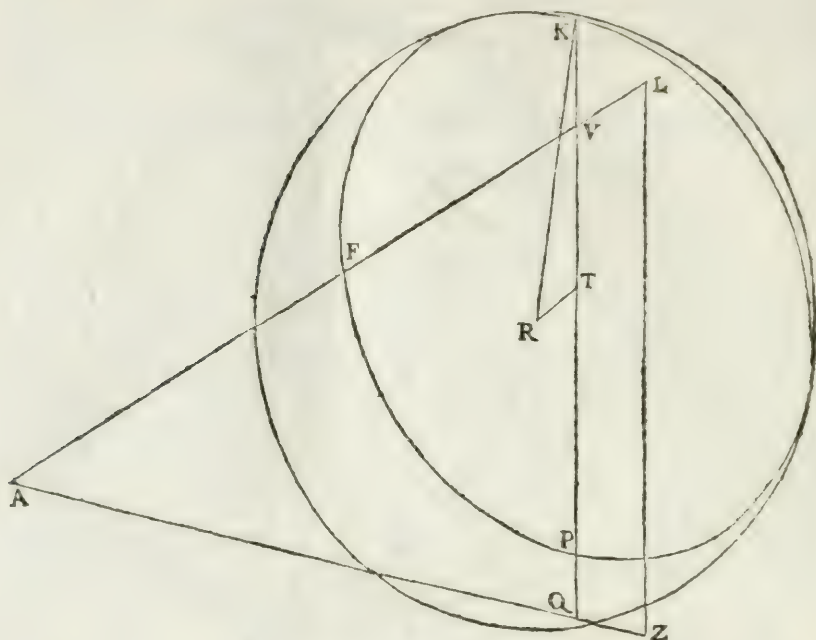
Quod si recta linea subjecto plano perpendicularis non incidat in centrum R, ut LZ, agatur per LZ, punctumque A planum sectionem faciens in sphæra circulum FKP, atque in subjecto plano rectam AZ; quod quidem planum sive transibit per sphæræ centrum R, sive non transibit. Transeat primo per sphæræ centrum R: ductaque per R recta KQ ipsi LZ parallela, jungatur AL. Et quoniam datæ sunt magnitudine rectæ AZ, AQ, LZ; & ut AZ ad AQ, ita se habet LZ ad VQ; data utique erit magnitudine etiam VQ. Atqui data eadem est & positione, datumque unum ejus extremum Q. Igitur & alterum V est datum. At vero id, quod diximus, planum per sphæræ centrum R non transeat. Ducatur ab R circulo FKP perpendicularis recta RT: eritque RT magnitudine data, datumque punctum T, circuli scili-

per 30. & 25. dat.

per 1. & 2. dat.

per 27. dat.

per 30. & 25. dat.



per cor. 2. propos. 1. sphær. l. 1. cet FKP centrum. Itaque ducatur per T recta KQ ipsi LZ parallela; jungaturque RK. Et quoniam trianguli rectanguli TKR latera, quæ sunt circa unum acutorum angulorum, nempe KRT, per cor. 43. dat. magnitudine sunt data, triangulum TKR specie ac magnitudine datum est; ideoque KT magnitudine est data. Jungatur LA: ac demonstrabitur, ut supra, punctum V datum esse. Quoniam igitur acto per LZ & punctum A plano, sive illud per sphæræ centrum R transeat, sive non transeat, id punctum, in quo juncta LA circuli FKP diametrum secat, datum est; constat demonstrationem eodem prorsus modo, ac supra, confici posse.

Data igitur positione & magnitudine; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

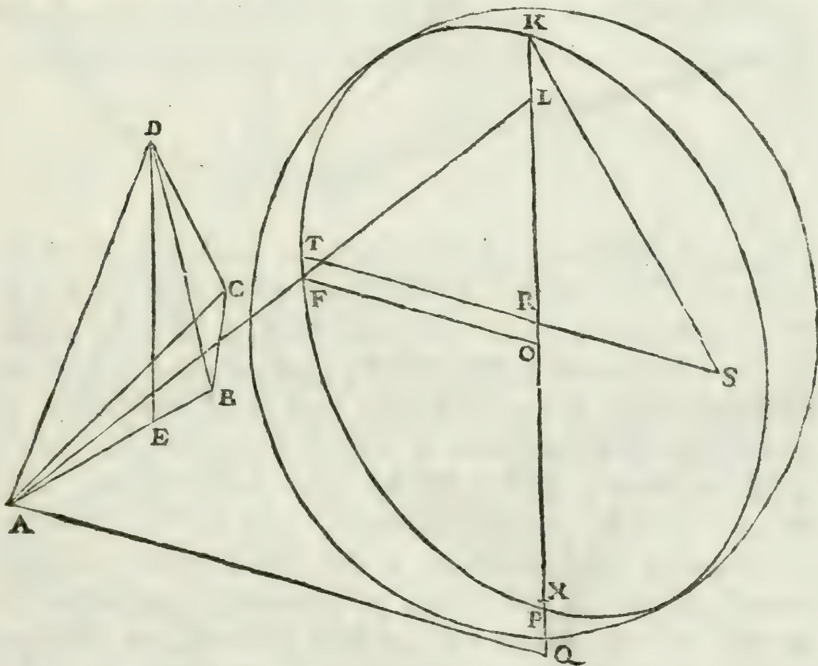
Illud vero manifestum est, quod de sphærica orthographia pyramidis ABCD in Propositione prima & vi-

cesima demonstratum est, idem de sphærica scenographia concurrente posse demonstrari.

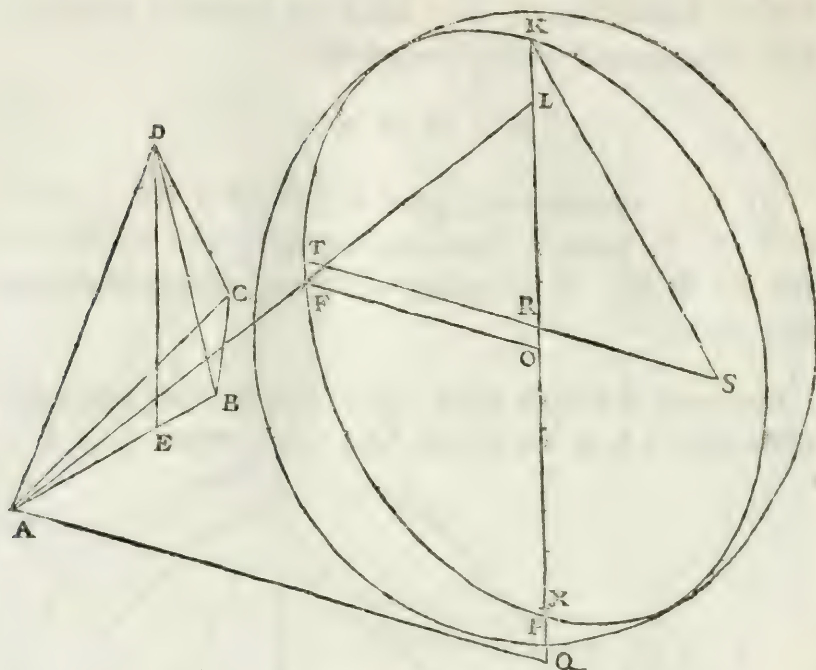
LEMMA I.

At vero quadratum, quod describitur a KR, majorem esse in secunda figura rectangulo, quod continetur sub KS & N, & minorem in tertia, demonstrabimus hoc pacto.

Quoniam, in secunda figura, LO ad FO majorem habet rationem, quam LR ad TR sive ad KR; habebit utique etiam qua-

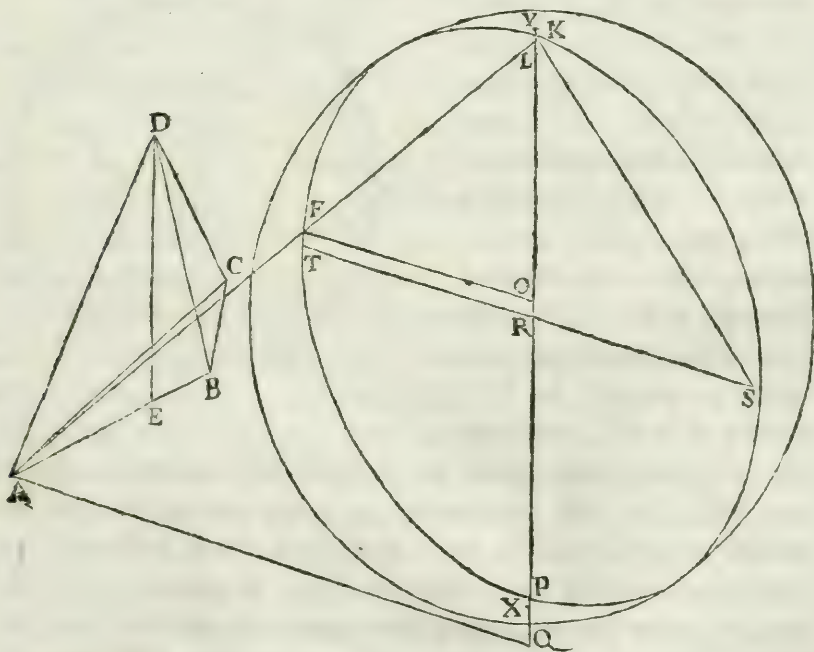


dratum, quod ab LO describitur, ad quadratum, quod describitur ab FO, majorem rationem, quam quadratum, quod ab LR describitur, ad quadratum, quod describitur a KR. Et componendo, quadrata, quæ describuntur ab LO & FO, ad quadratum, quod describitur ab FO, majorem rationem habent, quam qua-



drata, quæ deſcribuntur ab LR & KR, ad quadratum, quod deſcribitur a KR. At vero quadrata, quæ deſcribuntur ab LO & FO, æqualia ſunt quadrato, quod deſcribitur ab LF; & quadrata, quæ deſcribuntur ab LR & KR, quadrato æqualia, quod deſcribitur a KS. Igitur quadratum, quod ab LF deſcribitur, ad quadratum, quod deſcribitur ab FO, majorem rationem habet, quam quadratum, quod a KS deſcribitur, ad quadratum, quod deſcribitur a KR. At vero quadratum, quod ab LF deſcribitur, ad quadratum, quod deſcribitur ab FO, ita ſe habet, ut quadratum, quod ab LA deſcribitur, ad quadratum, quod deſcribitur ab AQ; hoc eſt, ſumpta KR communi altitudine, ut rectangulum, quod ſub KR, LA continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub KR & H. Igitur rectangulum, quod ſub KR & LA continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub KR & H, majorem rationem habet, quam quadratum, quod a KS deſcribitur, ad quadratum, quod deſcribitur a KR. Et permutando, rectangulum, quod ſub KR & LA continetur, ad quadratum, quod

a KS describitur, majorem rationem habet, quam rectangulum, quod continetur sub KR & H, ad quadratum, quod describitur a KR, hoc est quam H ad KR. At vero rectangulum, quod sub KR & LA continetur, ad quadratum, quod a KS describitur, rationem habet, quæ ex ratione componitur, quam habet tum LA ad KS, tum KR ad KS; & H ad KR habet rationem, quæ componitur ex ratione, quam habet tum H ad N, tum N ad KR. Quæ igitur ratio ex ratione componitur, quam habet tum LA ad KS, tum KR ad KS, hæc major est quam ratio, quæ componitur ex ratione, quam habet tum H ad N, tum N ad KR. Ut autem LA ad KS, ita se habet H ad N. Igitur KR ad KS majorem rationem habet, quam N ad KR: ac propterea quadratum, quod describitur a KR, majus est rectangulo, quod continetur sub KS & N. Quod erat primum. Quoniam vero,



in tertia figura, LO ad FO minorem habet rationem, quam LR ad TR sive ad KR, demonstrabitur, ut supra, KR ad KS minorem rationem habere, quam N ad KR; ac propterea quadratum,

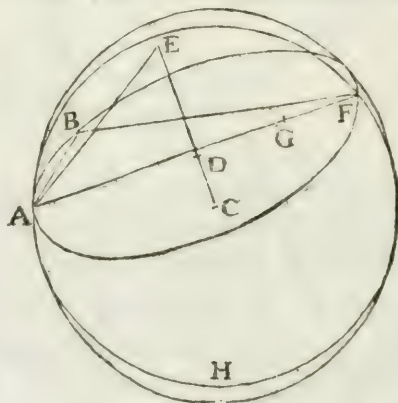
quod describitur a KP., minorem esse rectangulo, quod continetur sub KS & N. Quod erat alterum.

LEMMA II.

Per data duo puncta, quæ in sphærica superficie sunt, circulum describere, ita ut id, in quo ipse est, planum per datum punctum transeat.

Sint data duo puncta A, B, quæ sunt in sphærica superficie. Oportet circulum describere per puncta A, B, ita ut id planum, in quo ipse est, transeat per punctum datum. Hoc autem punctum aut erit intra sphæram, aut extra.

Sit primo intra sphæram, cujusmodi est G. Junguntur rectæ AB, AG; productaque AG ad sphæricam superficiem, agatur per AF, & sphæræ centrum C planum sectionem faciens in sphæra circulum AFH, qui circulus erit positione datus. Et quoniam intra circulum AFH sumptum fuit datum punctum G, ductaque per G in AFH quædam recta AF; datum utique erit rectangulum, quod sub AG, & GF continetur. Igitur tum AG, tum GF magnitudine data est; ideoque & quæ ex utrisque componitur AF. Atqui data eadem est & positione, datumque unum ejus extremum A. Igitur & alterum F est datum. At vero data est magnitudine etiam AB, datusque angulus BAF. Igitur si recta jungatur BF, triangulum ABF specie & magnitudine datum erit. Inveniatur centrum circuli, qui circa triangulum ABF describitur, idque sit punctum D; junctaque recta CD producatur ad sphæricam superficiem. Erit utique CE



per 93. dat.

per 3. dat.

per 27. dat.

per cor. 41. dat.

per 26. dat.

magnitudine data. Atqui data eadem eſt & poſitione, datumque unum ejus extremum C. Igitur & alterum E eſt datum. Quoniam vero a centro ſphæræ C ad centrum circuli, qui circa triangulum ABF deſcribitur, juncta eſt recta CD, ea ſi ab utraque parte producatur, per ejuſdem circuli polos tranſibit. Erit igitur punctum E horum polorum alter. Itaque ſi polo E, atque intervallo EA circulus deſcribatur, hic tranſibit per puncta B, F. Tranſeat, iſque ſit ABF. Conſtat autem id planum, in quo eſt circulus ABF, tranſire per punctum G.

per 27. dat.

per. 7. & 8. l. 1. ſphær.

At vero punctum datum ſit extra ſphæram, cujuſmodi eſt G. Jungantur rectæ AB, AG; agaturque per AG, & ſphæræ centrum C planum ſectionem faciens in ſphæra circulum AFH, qui circulus erit poſitione datus. Et quoniam extra circulum AFH ſumptum fuit datum punctum G, ductaque per G in AFH quædam recta AG; datum utique erit rectangulum, quod ſub AG, & GF continetur. Igitur tum AG, tum GF magnitudine data eſt; ideoque & quæ relinquitur AF. Atqui data eadem eſt & poſitione, datumque unum ejus extremum A. Igitur & alterum F eſt datum. At vero data eſt magnitudine etiam AB, datuſque angulus BAF. Igitur ſi recta jungatur BF, triangulum ABF ſpecie & magnitudine datum erit. Inveniatur centrum circuli, qui circa triangulum ABF deſcribitur, idque ſit punctum D; ac cætera fiant, ut ſupra. Demonſtratio eodem prorſus modo conficietur.

per 92. dat.

per 4. dat.

per 27. dat.

per cor. 41. dat.

Igitur per data duo puncta; & quæ ſequuntur. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

Quoniam omnis figura ſolida a ſuperficiebus comprehenditur, omniſque ſuperficies a lineis; demonſtratumque eſt quomodo figuræ ſolidæ delineatio cujuſquemodi conficienda ſit; illud conſtat, idem fuiſſe demonſtratum etiam de ſuperficie, & linea.

FINIS
LIBRI PRIMI.

ELE-

ELEMENTORUM PROSPECTIVÆ

LIBER II.

DEFINITIONES.

SI data fuerit in ſublimi poſitione & magnitudine figura aliqua ſolida: ducanturque ab ejus angulis ad ſubjectum planum rectæ lineæ rectæ cuidam poſitione datæ parallelæ, ex quibus angulis ita duci poſſunt, ut totæ extra ſolidam figuram cadant; quæ figura ab iis planis, in quibus hæ parallelæ ſunt, comprehenditur, ſolidæ figuræ, quam diximus, UMBRA PARALLELA vocetur.

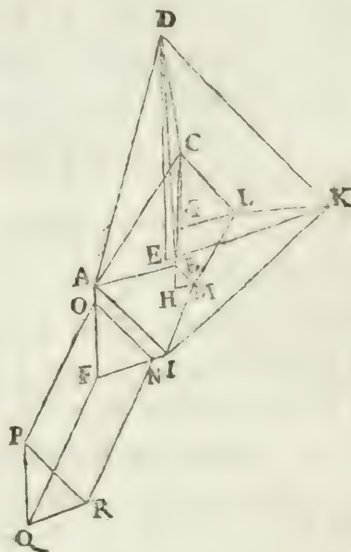
Sectio autem ejuſdem figuræ, quæ fit a ſubjecto plano, vocetur UMBRÆ PARALLELÆ BASIS RECTA.

Quod ſi umbra parallela plano per baſim rectam ſecetur, ſectio umbræ parallelæ, quæ ab eo fit plano, una cum ea baſis rectæ parte, quam idem planum ſolidam figuram verſus abſcindit, vocetur UMBRÆ PARALLELÆ BASIS INFLEXA.

PROPOSITIO I.

Data in ſublimi poſitione & magnitudine pyramide triangularem baſim habente, dataque poſitione recta quadam linea, ejuſdem pyramidis umbræ parallelæ baſim rectam invenire.

Data ſit in ſublimi poſitione & magnitudine pyramis ABCD, cujus baſis triangulum ABC, vertex D; dataque ſit poſitione recta PR. Oportet invenire baſim rectam umbræ parallelæ pyramidis ABCD.



per 1. prop. lib. 1. Inveniantur veſtigium pyramidis ABCD, & altitudines angulorum A, B, C, D; ideſt puncta F, H, G, E, rectæque AF, BH, CG, DE. Et ſi quidem recta PR fuerit ſubjecto plano perpendicularis, erunt utique rectæ AF, BH, CG, quæ totæ cadunt extra pyramidem ABCD, ipſi PR parallelæ. Itaque ſi a punctis F ad H, H ad G, G ad F rectæ jungantur, quæ oritur figura, erit baſis recta, quam quærimus, umbræ parallelæ pyramidis ABCD. Quod ſi PR fuerit ad ſubjectum planum inclinata, ducatur a puncto P eidem plano perpendicularis recta PQ; jungaturque QR. Erit utique angulus acutus QRP rectæ PR ad ſubjectum planum inclinatio, ideoque datus: datæque erunt poſitione & magnitudine PQ, QR. Itaque ducatur a puncto F recta FI parallela ipſi QR; ſumptaque in AF FO æquali ipſi PQ, & in FI FN æquali ipſi QR, jungantur rectæ QF, PO, RN, NO. Et quoniam PQ, FO æquales ſunt ac parallelæ, ideo QF æqualis eſt ac parallela ipſi PO. Æqualis eſt autem ac parallela QF ipſi RN. Æqualis eſt igitur ac parallela etiam PO ipſi RN; ac propterea ON parallela eſt ipſi PR. Itaque ſi a puncto A ducatur AI parallela ipſi ON, ea ipſi PR parallela erit. Quoniam vero OF, FN magnitudine datæ ſunt, data utique erit ratio, quam OF habet ad FN. Ut autem OF ad FN, ita ſe habet AF ad FI. Igitur & ratio data eſt, quam AF habet ad FI. Da-

(Margin notes: per cor. 40. dat. — per 1. dat.)

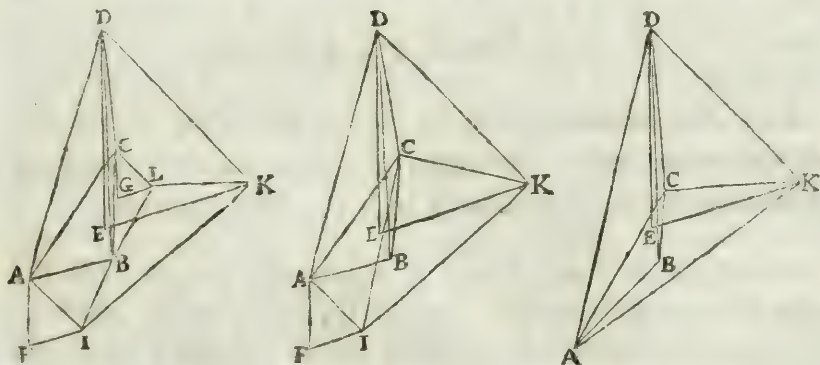
ta est autem magnitudine AF. Data est igitur magnitudine etiam FI. Atqui data eadem est etiam positione, datumque unum ejus extremum F. Igitur & alterum I est datum. Eodem modo si rectæ ducantur HM, BM; GL, CL; EK, DK, demonstrabitur rectas BM, CL, DK ipsi PR parallelas esse, dataque puncta M, L, K. Atque erit figura ABCDKLMI planis comprehensa, in quibus sunt parallelæ AI, BM, CL, DK, quæ totæ cadunt extra pyramidem ABCD. Itaque si rectæ jungantur IM, ML, LK, KI, quæ oritur figura IMLK, erit sectio ejus figuræ, quam diximus, quæ fit a subjecto plano. Hujusmodi autem sectio vocatur basis recta umbræ parallelæ, & quidem pyramidis ABCD. Igitur figura IMLK basis recta est umbræ parallelæ pyramidis ABCD.

per 2. dat.
per 28. dat.
per 27. dat.

Data igitur in sublimi positione & magnitudine pyramide triangularem basim habente; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

Si pyramis ABCD in sublimi non fuerit, erit utique in subjecto plano aut unus ejus angulus B, aut unum



latus BC, aut basis ABC. Si igitur primum, constat figuram IMLK mutari in IBLK; si alterum, in ICK; si tertium, in ACK; quemadmodum in tribus figuris apparet, quæ hic ordine appositæ sunt.

DEFINITIONES.

Si data fuerit in sublimi positione & magnitudine figura aliqua solida: ducanturque a puncto dato per ejus angulos ad subjectum planum rectæ lineæ, per quos angulos ita duci possunt, ut totæ extra solidam figuram cadant; quæ figura ab iis triangulis comprehenditur, quorum sunt latera hæ, quas diximus, rectæ, vertex punctum datum, solidæ figuræ, quam diximus, UMBRA RECEDENS vocetur.

Sectio autem ejusdem figuræ, quæ fit a subjecto plano, vocetur UMBRÆ RECEDENTIS BASIS RECTA.

Quod si umbra recedens plano per basim rectam secetur, sectio umbræ recedentis, quæ ab eo fit plano, una cum ea basis rectæ parte, quam idem planum solidam figuram versus abscindit, vocetur UMBRÆ RECEDENTIS BASIS INFLEXA.

PROPOSITIO II.

Data in sublimi positione & magnitudine pyramide triangularem basim habente, datoque puncto, ejusdem pyramidis umbræ recedentis basim rectam invenire.

Data sit in sublimi positione & magnitudine pyramis ABCD, cujus basis triangulum ABC, vertex D; datumque sit punctum Π. Oportet invenire basim rectam umbræ recedentis pyramidis ABCD.

Inveniantur vestigium pyramidis ABCD, & altitudines angulorum A, B, C, D; idest puncta F, H, G, E, rectæque AF, BH, CG, DE. Ducatur autem a puncto Π subjecto plano perpendicularis recta ΠΣ. Erit utique ΠΣ ipsi AF parallela, eadem-

per 1. prop. lib. 1.

que data positione & magnitudine, datumque item punctum Σ. Jungantur rectæ ΠA, ΣF. Et quoniam anguli ΣΠA, ΠΣF duobus rectis minores sunt, ideo ΠA, ΣF si producantur, convenient invicem ad partes A, F. Itaque producantur, conveniantque in puncto I; & ducatur per A ipsi ΣF parallela recta AO. Quoniam igitur ΠΣ, AF magnitudine datæ sunt, data utique erit magnitudine etiam ΠO. Data autem magnitudine est etiam ΣF, sive eidem æqualis AO. Igitur ratio data est, quam habet ΠO ad AO. Ut autem ΠO ad AO, ita se habet AF ad FI. Igitur data est ratio, quam AF habet ad FI. Data est autem magnitudine AF. Data est igitur magnitudine etiam FI. Atqui data eadem est etiam positione, datumque unum ejus extremum F. Igitur & alterum I est datum. Eodem modo si rectæ ducantur HM, BM; GL, CL; EK, DK, demonstrabitur puncta M, L, K data esse. Atque erit figura IMLKΠ triangulis comprehensa IΠM, MΠL, LΠK, KΠI, quorum sunt latera rectæ ΠI, ΠM, ΠL, ΠK, quæ totæ cadunt extra pyramidem ABCD, vertex datum punctum Π. Itaque si rectæ jungantur IM, ML, LK, KI, quæ oritur figura IMLK, erit sectio ejus figuræ, quam diximus, quæ fit a subjecto plano. Hujusmodi autem sectio vocatur basis recta umbræ recedentis, & quidem pyramidis ABCD. Igitur figura IMLK basis recta est umbræ recedentis pyramidis ABCD.

per 30. 25. & 26. dat.

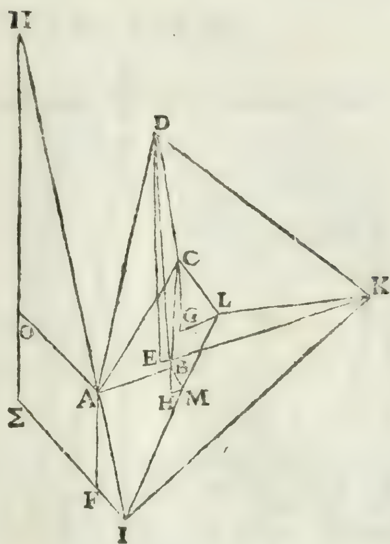
per 4. dat.

per 26. dat.

per 1. dat.

per 2. dat.

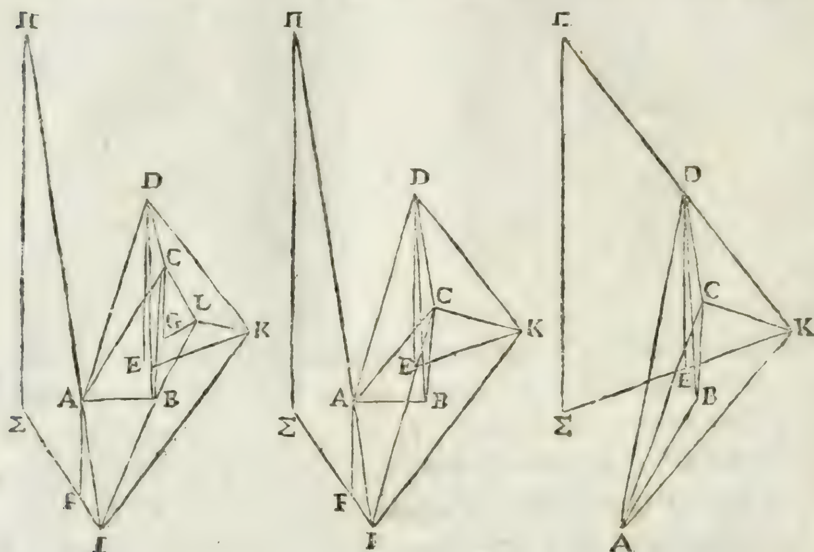
per 27. dat.



Data igitur in sublimi positione & magnitudine pyramide triangularem basim habente, datoque puncto; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

Si pyramis ABCD in ſublimi non fuerit, quod de



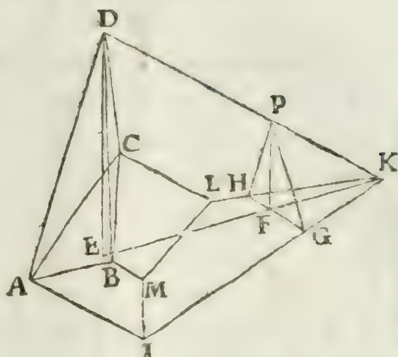
umbræ parallelæ baſi in Corollario ſuperioris Propoſitionis collegimus, idem de baſi umbræ recedentis colligetur, ut in appoſitis hic ordine tribus figuris.

PROPOSITIO III.

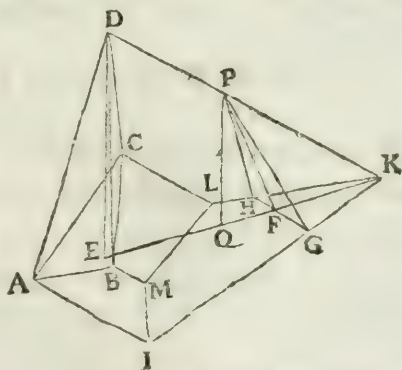
Si pyramidis triangularem baſim habentis, datæque poſitione & magnitudine umbra plano aliquo per ejus baſim rectam ſecetur, ſive ea parallela fuerit, ſive recedens, umbræ, quam diximus, planique ſecantis ſectionem invenire.

Sit ABCDKLMI umbra parallela pyramidis ABCD, cujus baſis triangulum ABC, vertex D: eaque ſecetur per baſim rectam IMLK plano GPH; ſitque GPH ſectio umbræ parallelæ ABCDKLMI, & plani GPH. Oportet invenire ſectionem GPH.

Ducatur a puncto D recta DE ſubjecto plano perpendicularis; agaturque per DE, & punctum K planum DEK ſectionem faciens in ſubjecto plano rectam EK. Itaque planum GPH aut erit rectum ad ſubjectum planum, aut ad idem inclinatum. Sit primo rectum. Et quoniam duo plana DEK, GPH ſe ſe invicem ſecantia



ſubjecto plano ad rectos angulos ſunt, etiam communis eorum
ſectio FP ſubjecto plano ad rectos angulos erit. At vero ED eidem plano eſt ad rectos angulos. Igitur ED, FP ſunt parallelæ. Et quoniam ut EK ad KF, ita ſe habet ED ad FP, ratioque
data eſt, quam habet EK ad KF; ideo data erit & ratio, quam per 1. dat.
ED habet ad FP. Data eſt autem magnitudine ED. Data eſt
igitur magnitudine etiam FP. Atqui data eadem eſt & poſitione, per 2. dat.
datumque unum ejus extremum F. Igitur & alterum P eſt da- per 27. dat.
tum. Jungantur rectæ GP, HP: eritque GPH ſectio, quam quærimus. At vero planum GPH inclinatum ſit ad planum ſubjectum; communiſque horum planorum ſectio GH angulos faciat cum EK æquales. Erit utique angulus EFP eorumdem planorum inclinatio; ideoque datus tum ipſe, tum qui deinceps ponitur PFK. Datus eſt autem etiam angulus FKP, dataque magnitudine FK. Igitur FP magnitudine data eſt. per cor. 40. dat.
Ducatur a puncto P ipſi EK



perpendicularis recta PQ: eademque ratione data erit magnitudi-
ne FQ, ideoque etiam KQ. Atqui data eadem eſt etiam poſitio- per 3. dat.
ne, datumque unum ejus extremum K. Igitur & alterum Q per 27. dat.

est datum. Quoniam igitur ED, PQ sunt parallelæ, ratioque data est, quam habet EK ad KQ, demonstrabitur, ut supra, punctum P datum esse. Itaque jungantur rectæ GP, HP; eritque GPH sectio, quam quærimus. Quod si GH ipsam EK secet ad angulos inæquales, producatur planum GPH, eique occurrat DE, si oportuerit, producta in puncto O; deinde vero ducta a puncto E ipsi GH perpendiculari EN, rectæ jungantur FO, NO. Erit igitur angulus ENO plani GPH inclinatio ad planum subjectum, ideoque datus. At vero datus est etiam angulus NEO, dataque magnitudine EN. Igitur magnitudine data est tum NO, tum EO. Et quoniam triangulum FNO circa datum angulum FNO latera habet FN, NO magnitudine data, data utique erit magnitudine FO. At vero datæ sunt magnitudine etiam EF, EO. Igitur triangulum EFO specie & magnitudine datum est; ac propterea datus est angulus EFO, quique deinceps ponitur OFK. Quod cum ita sit, ducta a puncto P recta PQ ipsi EK perpendiculari, demonstrabitur, ut supra, punctum P datum esse. Itaque jungantur rectæ GP, HP; eritque GPH sectio, quam quærimus.

per 30. 25. & 26. dat.

per cor. 40. dat.

per cor. 41. dat.

Haud secus invenietur sectio umbræ recedentis pyramidis ABCD, quæ ab eo fit plano, quod diximus.

Si igitur pyramidis triangularem basim habentis, datæque positione & magnitudine; & quæ sequuntur. Quod opportebat facere.

COROL-

COROLLARIUM.

Quoniam figura IMLGHP eſt baſis inflexa umbræ parallelæ pyramidis ABCD, illud conſtat inventa ſectione GPH, eam quoque, quam diximus, baſim inventam eſſe.

PROPOSITIO IV.

Data poſitione & magnitudine baſi recta, inflexave umbræ ſive parallelæ, ſive recedentis pyramidis triangularem baſim habentis, aut ſphæræ poſitione & magnitudine datæ, conficere ejuſdem baſis orthographiam, cæteraſque delineationes tum in plano, tum in ſphærica eaque concava ſuperficie.

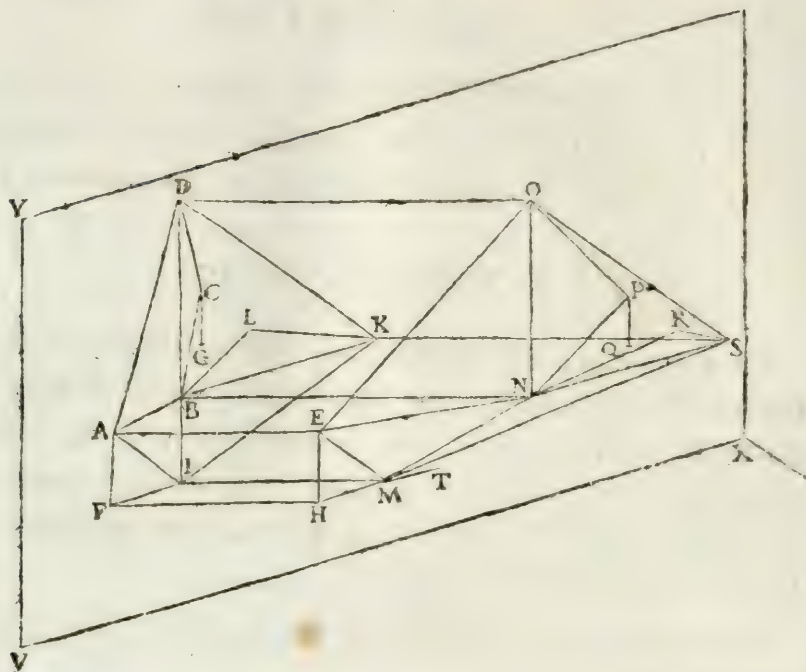
Hoc autem quomodo fiat, Propoſitiones oſtendunt ſecunda, & ſequentes Libri I.

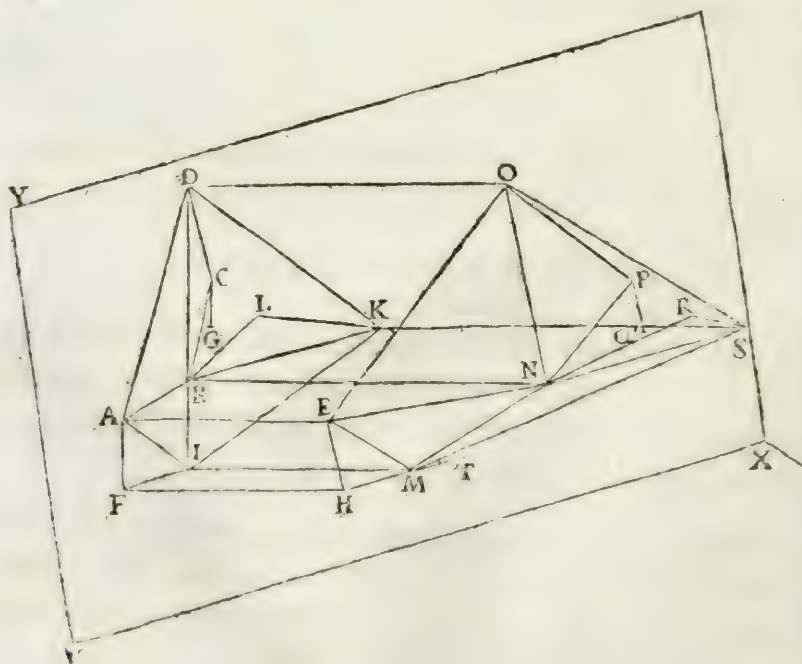
ALITER AD BASIM RECTAM QUOD ATTINET UMBRÆ TUM PARALLELÆ TUM RECEDENTIS.

PROPOSITIO V.

Data poſitione & magnitudine baſi recta umbræ parallelæ pyramidis triangularem baſim habentis, ejuſdem baſis rectæ ſcenographiam tum parallelam, tum parallelam procumbentemque conficere.

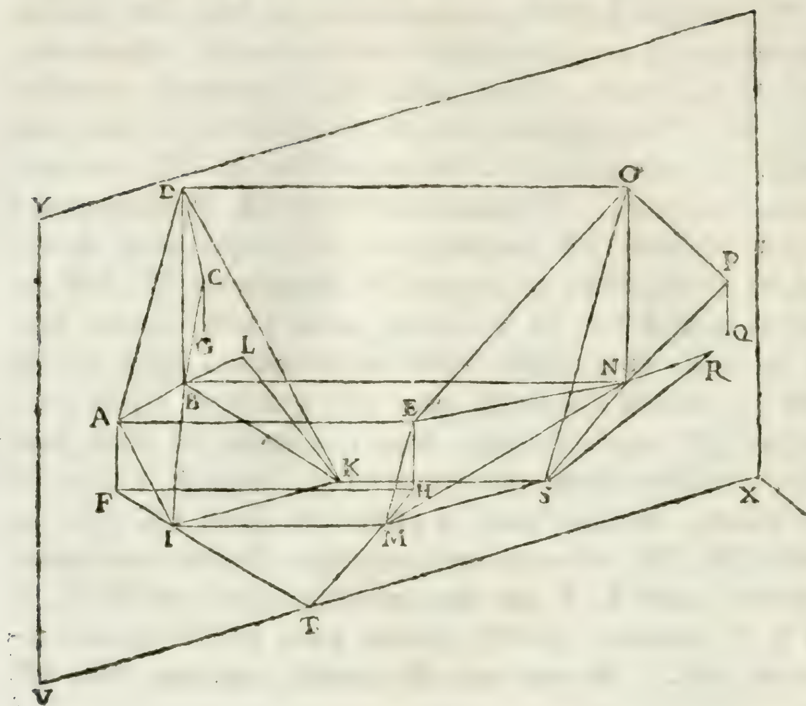
Data ſit poſitione & magnitudine baſis recta IBLK umbræ parallelæ ABCDKLBI pyramidis ABCD, cujus baſis ABC, vertex D. Oportet conficere ſcenographiam tum parallelam, tum parallelam procumbentemque baſis rectæ IBLK.

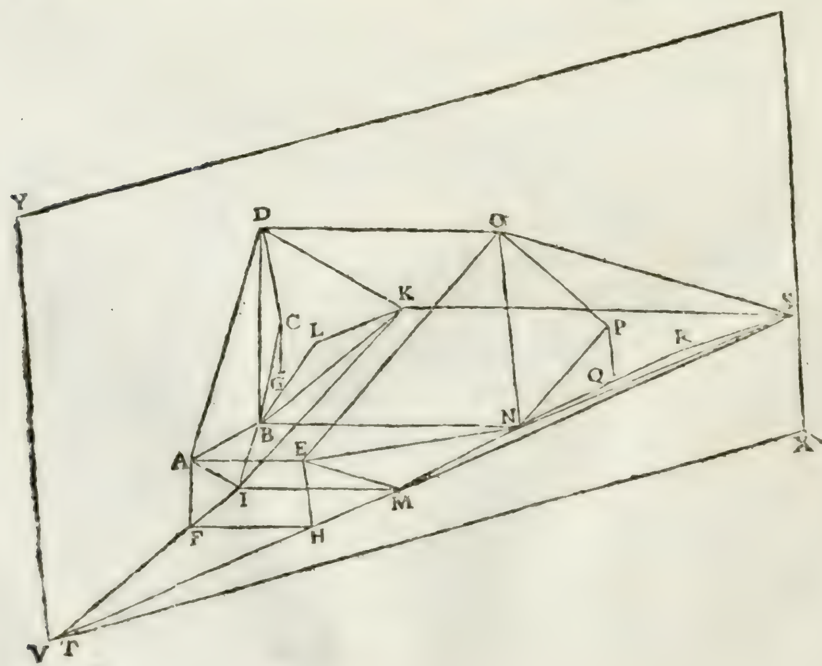

Y
D
O
C
L
K
P
R
G
Q
S
N
B
E
A
I
X
M
T
F
H
V


Y
D
O
C
L
K
P
R
G
Q
S
N
E
A
I
X
M
T
F
H

Sit delineatio ENPO ſcenographia ſive parallela, ſive parallela procumbenſque pyramidis ABCD: deſcriptaque ſint diagrammata, quæ iis conficiendis, baſique rectæ IBLK inveniendæ neeeſſaria ſunt, ut in Propoſitionibus quarta & ſexta libri I., & prima hujuſce. Ac recta quidem FI ſive parallela erit ipſi VX, ſive cum eadem concurret. Sit primo parallela ipſi VX. Ducatur autem a puncto H eidem VX parallela recta HT; auferaturque ab HT ipſi FI æqualis HM; & jungatur IM. Et quoniam FI, HM parallelæ utraque ſunt ipſi VX, erunt utique parallelæ etiam inter ſe invicem. Sunt autem eædem etiam æquales. Igitur IM ipſi FH eſt parallela. Quoniam vero HM æqualis eſt ipſi FI, erit utique HM magnitudine data. Atqui data eadem eſt etiam poſitione, datumque unum ejus extremum H. Igitur & alterum M eſt datum. Ducantur modo a punctis N, Q ipſi VX parallelæ rectæ NS, QR, eademque fiant, quæ ſupra. Eodem modo demonſtrabitur puncta S, R data eſſe; rectaſque, quæ a punctis K, L ad S, R ducuntur, ipſi FH, ideoque etiam inter ſe invicem parallelas eſſe. At vero recta FI producta concurrat cum VX

per 26. dat.
per 28. dat.
per 27. dat.


Y
D
O
C
P
G
L
Q
N
R
B
E
A
K
H
S
X
F
I
M
T
V


Y
D
O
K
S
C
L
P
R
G
Q
N
B
E
X
A
I
M
F
H
V
T

in puncto T. Atque erit punctum T datum. Itaque jungatur recta HT, quæ, si oportuerit, producatur; & fiat ut TF ad FI, ita TH ad HM; ducaturque IM. Erit utique IM parallela ipsi FH. Et quoniam ut TF ad FI, ita se habet TH ad HM, ratioque data est, quam TF habet ad FI, ideo data erit & ratio, quam TH habet ad HM. At vero TH magnitudine data est. Igitur data est magnitudine etiam HM. Atqui data eadem est etiam positione, datumque unum ejus extremum H. Igitur & alterum M est datum. Producantur modo BK, GL, quæ quidem haud secus quam FI concurrent cum VX, eademque fiant, quæ supra. Eodem modo demonstrabitur puncta S, R data esse; rectasque, quæ a punctis K, L ad S, R ducuntur, ipsi FH, ideoque etiam inter se invicem parallelas esse. Itaque jungantur in quatuor hisce figuris rectæ NM, MS, SR, RN: atque erit, per definitiones Propositionum quartæ & sextæ libri I., quæ oritur delineatio MNRS, scenographia sive parallela, sive parallela procumbensque basis rectæ IBLK.

per 23. dat.
per 1. dat.
per 26. dat.
per 2. dat.
per 27. dat.

Data igitur positione & magnitudine basi recta umbræ parallelæ pyramidis triangularem basim habentis; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

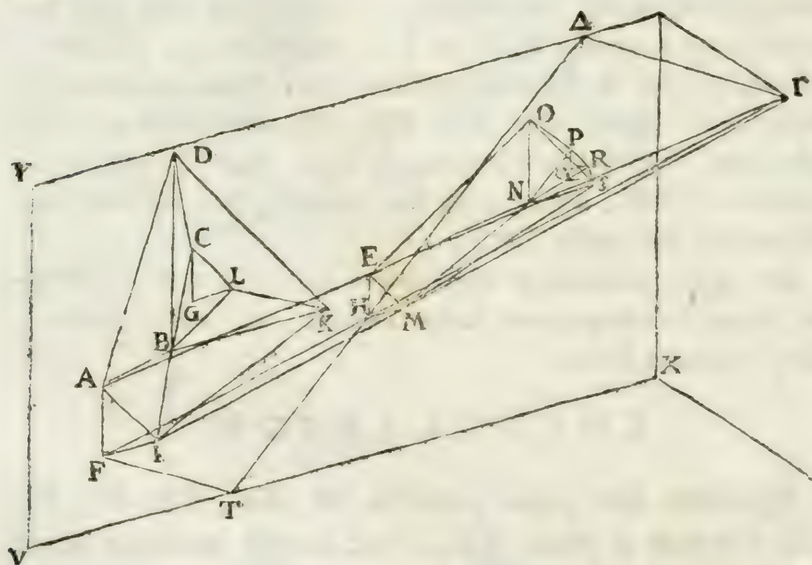
COROLLARIUM.

Quoniam duo plana parallela IH, KN; FE, BO; IE, KO secantur a plano YX, erunt utique parallelæ inter se invicem communes ipsorum sectiones, nempe HM ipsi NS, EH ipsi ON, EM ipsi OS; ideoque triangula EMH, OSN similia erunt similiterque posita. Ex quo manifestum est, invento puncto quolibet M delineationis MNRS, reliqua S, R, & siqua sunt alia, facillime inventum iri.

PROPOSITIO VI.

Data poſitione & magnitudine baſi recta umbræ parallelæ pyramidis triangularem baſim habentis, ejuſdem baſis rectæ ſcenographiam concurrentem conficere.

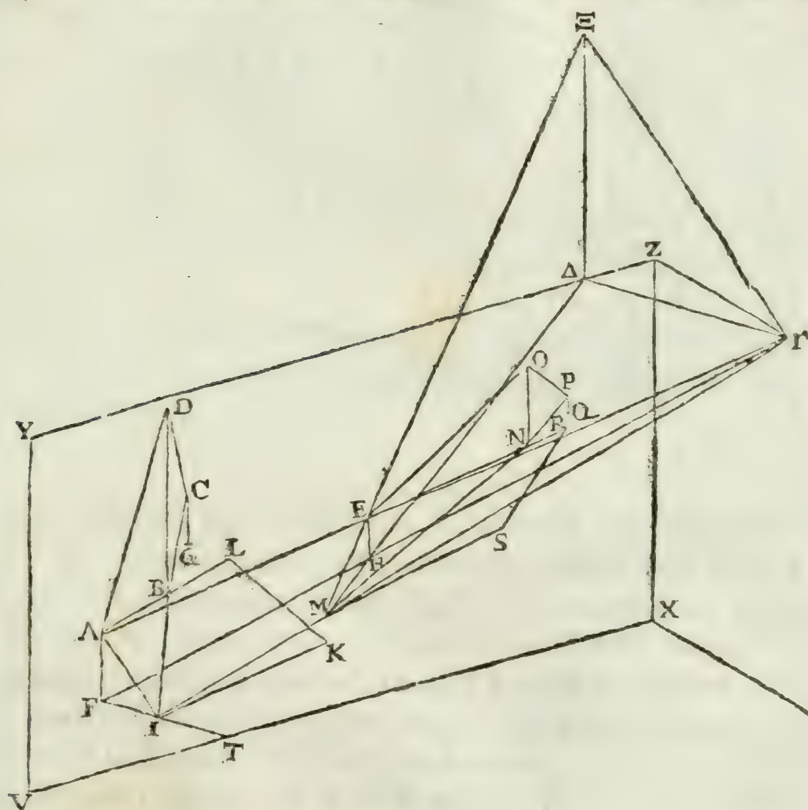
Data ſit poſitione & magnitudine baſis recta IBLK umbræ parallelæ ABCDKLBI pyramidis ABCD, cujus baſis ABC, vertex D. Oportet conficere ſcenographiam concurrentem baſis rectæ IBLK.



Sit delineatio ENPO ſcenographia concurrens pyramidis ABCD; deſcriptaque ſint diagrammata, quæ illi conficiendæ, baſique rectæ IBLK inveniendæ neceſſaria ſunt, ut in Propoſitionibus ſeptima libri I., & prima hujuſce. Ac recta quidem FI ſive parallela erit ipſi VX, ſive cum eadem concurret. Sit primo parallela ipſi VX; jungaturque recta IΓ plano YX occurrens in puncto M. Et quoniam duo plana parallela YX, AFI ſecantur a plano ΓFI, erunt utique communes ipſorum ſectiones FI, HM inter ſe invicem parallelæ. Igitur FΓ ad ΓH ita ſe habet, ut FI ad HM.

Ut autem FΓ ad ΓH, ita se habet TΔ ad ΔH. Igitur TΔ ad ΔH ita se habet, ut FI ad HM. Data est autem ratio, quam TΔ habet ad ΔH. Igitur data est & ratio, quam FI habet ad HM. At vero FI magnitudine data est. Igitur data est magnitudine etiam HM. Atqui data eadem est etiam positione, datumque unum ejus extremum H. Igitur & alterum M est datum. Jungantur modo rectæ KΓ, LΓ plano YX occurrentes in punctis S, R, eademque fiant, quæ supra. Eodem modo demonstrabitur puncta S, R data esse. At vero recta FI producta concurrat cum VX in

per 1. dat.
per 26. dat.
per 2. dat.
per 28. dat.
per 27. dat.



puncto T. Atque erit punctum T datum, datusque item angulus FTV. Agatur per rectam FT punctumque Γ planum FΓT. Et quoniam duo plana parallela ΓZY, FTV secantur a plano FΓT, erunt utique communes ipsorum sectiones ΓΔ, FT inter se in-

vicem parallelæ. Parallela eſt autem etiam ZΔ ipſi VT. Igitur angulus ΓΔZ æqualis eſt angulo FTV, ideoque datus. At vero datus eſt etiam angulus ΓZΔ, dataque magnitudine ΓZ. Igitur per cor. 41. dat. triangulum ΓZΔ ſpecie & magnitudine eſt datum; ideoque datæ ſunt magnitudine rectæ ΓΔ, ZΔ. At vero ZΔ data eſt etiam po- per 27. dat. ſitione, datumque unum ejus extremum Z. Igitur & alterum Δ eſt datum. Ducatur a puncto Δ in plano YX, ipſi YZ ad rectos angulos, recta ΔΞ. Erit utique ΔΞ ipſi FA parallela. Parallela eſt autem etiam ΓΔ ipſi FI. Planum igitur ΞΔΓ parallelum eſt plano AFI. Itaque ſi per rectam AI punctumque Γ agatur planum AΓI, eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur, rectam ΓΞ ipſi AI parallelam eſſe, datumque punctum Ξ. Jungatur modo recta IΓ plano YX occurrens in puncto M, Quoniam igitur parallelæ ſunt rectæ ΓΔ, FI, erunt utique puncta Δ, F, I in plano FΓI. Quo

ſunt

ſunt autem in plano puncta F, I, in eodem ſunt etiam H, M. Igitur puncta Δ, H, M ſunt in plano FΓI. At vero eadem ſunt etiam in plano YX. Puncta igitur Δ, H, M ſunt in communi ſectione planorum YX, FΓI, ideoque in recta linea ΔM. Eadem ratione quoniam parallelæ ſunt rectæ ΓΞ, AI, punctaque E, M in eodem ſunt plano atque A, I, demonſtrabitur in recta linea ΞM eſſe puncta Ξ, E, M. Quare punctum M cum ſit in utraque recta ΔH, ΞE, erit in communi earumdem ſectione. Jam vero quoniam puncta Δ, H data ſunt, erit recta ΔH poſitione data. Eadem ratione cum data ſint puncta Ξ, E, data erit poſitione etiam ΞE. Igitur punctum M eſt datum. Jungantur modo rectæ KΓ, LΓ plano YX occurrentes in punctis S, R. Eodem modo demonſtrabitur puncta S, R data eſſe. Itaque jungantur tam in prima quam in ſecunda figura rectæ NM, MS, SR, RN: atque erit, per definitionem Propoſitionis ſeptimæ libri I., quæ oritur delineatio MNRS, ſcenographia concurrens baſis rectæ IBLK.

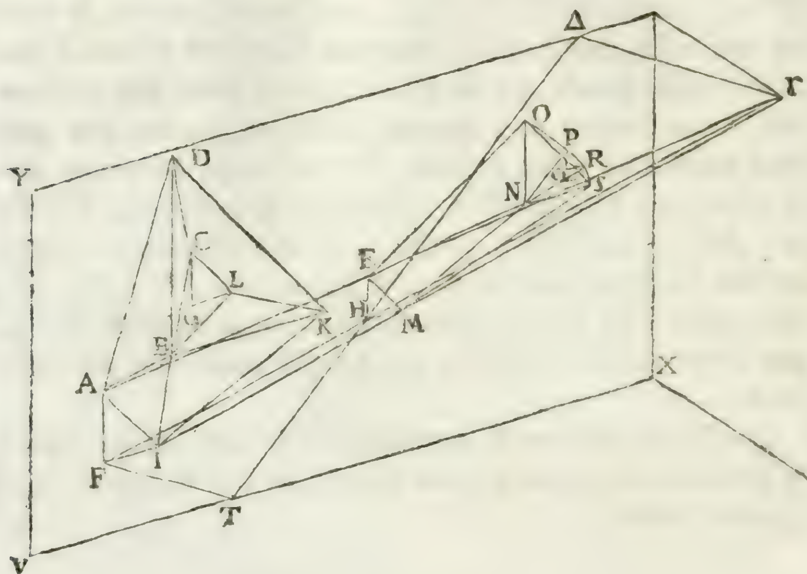
per def. 4. dat.

per 25. dat.

Data igitur poſitione & magnitudine baſi recta umbræ parallelæ pyramidis triangularem baſim habentis; & quæ ſequuntur. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

Quoniam in prima figura hujusce Propositionis duo plana parallela YX, AFI secantur a planis ΓFA, ΓIF, ΓIA, erunt utique parallelæ inter se invicem commu-

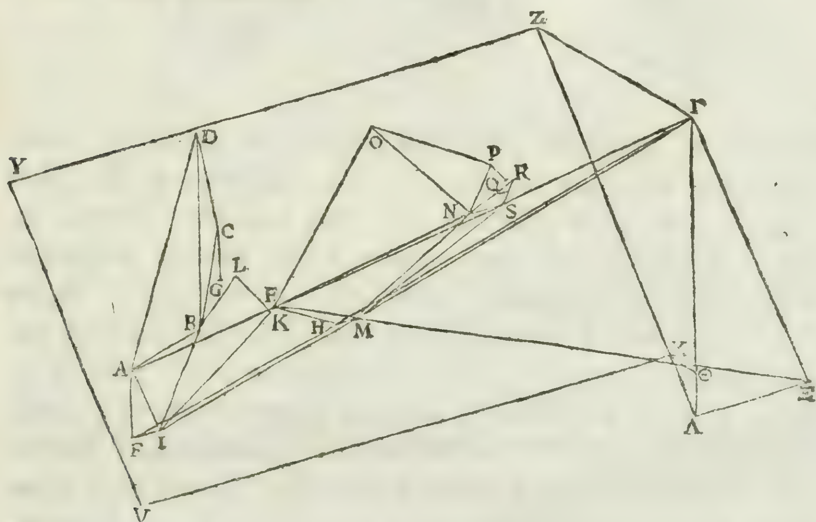


nes ipsorum sectiones, nempe EH ipsi AF; HM ipsi FI; ME ipsi IA; ideoque triangulum EHM simile erit triangulo AFI. Eadem ratione similia erunt triangula ONS ipsi DBK, & PQR ipsi CGL. At vero triangula AFI, DBK, CGL similia inter se invicem sunt similiterque posita. Igitur similia sunt inter se invicem similiterque posita etiam triangula EHM, ONS, PQR. Ex quo illud manifestum est, invento puncto quolibet M delineationis MNRS, reliqua S, R, & siqua sunt alia, facillime inventum iri.

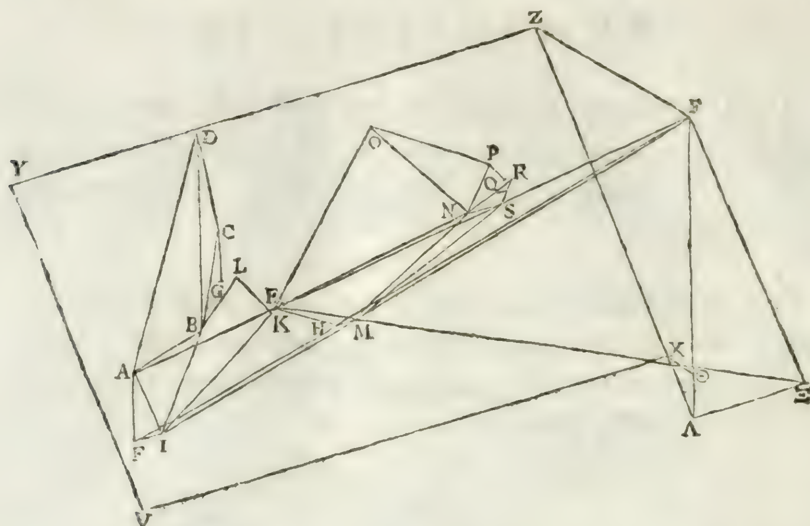
PROPOSITIO VII.

Data poſitione & magnitudine baſi recta umbræ parallelæ pyramidis triangularem baſim habentis, ejuſdem baſis rectæ ſcenographiam concurrentem procumbentemque conficere.

Data ſit poſitione & magnitudine baſis recta IBLK umbræ parallelæ ABCDKLBI pyramidis ABCD, cujus baſis ABC, vertex D. Oportet conficere ſcenographiam concurrentem procumbentemque baſis rectæ IBLK.

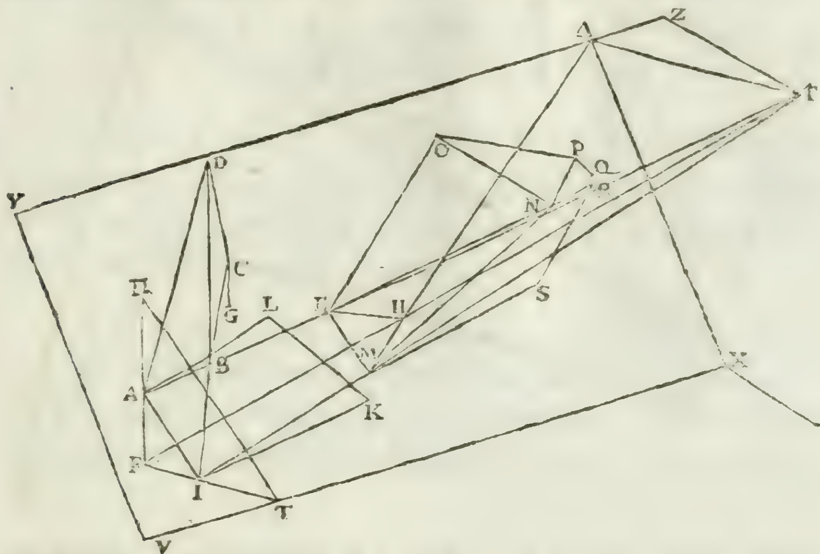


Sit delineatio ENPO ſcenographia concurrens procumbenſque pyramidis ABCD: deſcriptaque ſint diagrammata, quæ illi conficiendæ, baſique rectæ IBLK inveniendæ neceſſaria ſunt, ut in Propoſitionibus undecima libri I., & prima hujuſce. Ac recta quidem FI ſive parallela erit ipſi VX, ſive cum eadem concurret. Sit primo parallela ipſi VX. Ducatur autem a puncto H ipſi VX parallela recta HM. Erit igitur eadem parallela ipſi etiam FI. Itaque ſi recta jungatur IΓ plano YX occurrens in puncto M, erit id punctum in HM. Producatur ΓΘ ſubjecto plano per-

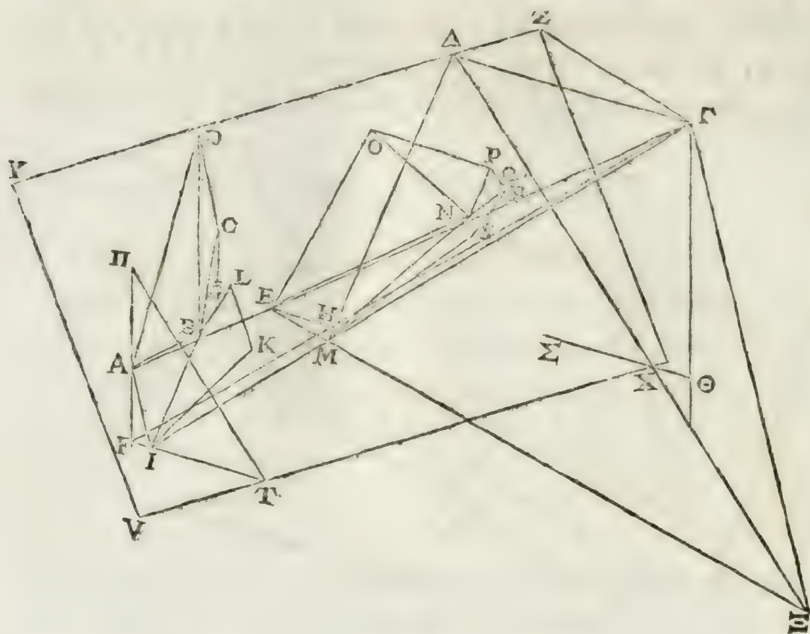


pendicularis, quousque plano YX occurrat in puncto Λ; ducaturque ΘX ad rectos angulos ipsi VX, jungaturque XΛ. Erit utique angulus ΘXΛ planorum YX, VΘ inclinatio, ideoque da-
per 30. 25. & 26. dat. tus. At vero datus est etiam angulus XΘΛ, dataque magnitudi-
per cor. 40. dat. ne ΘX. Igitur triangulum ΘXΛ specie & magnitudine datum est; ideoque datæ sunt magnitudine ΘΛ, XΛ. Atqui data est XΛ
per 27. dat. etiam positione, datumque unum ejus extremum X. Igitur & alterum Λ est datum. Ducatur modo a puncto Λ ipsi VX parallela recta ΛΞ, agaturque per rectam AI, punctumque Γ planum sectionem faciens in plano ΓΛΞ rectam ΓΞ. Erit utique ΓΞ parallela ipsi AI. Parallela est autem etiam ΓΛ ipsi AF. Igitur angulus ΛΓΞ æqualis est angulo FAI, ideoque magnitudine datus.
per 3. dat. At vero datus est magnitudine etiam angulus ΓΛΞ, dataque ma-
per cor. 40. dat. gnitudine ΓΛ. Igitur triangulum ΓΛΞ specie & magnitudine est
per 28. dat. datum; ideoque data magnitudine ΛΞ. Atqui data eadem est et-
per 27. dat. iam positione, datumque unum ejus extremum Λ. Igitur & alterum Ξ est datum. Quoniam igitur parallelæ sunt rectæ ΞΓ, AI, demonstrabitur, ut in superiore Propositione, punctum M esse in recta linea ΞE. Est autem hoc idem etiam in HM; dataque est positione utraque HM, ΞE. Punctum igitur M est datum. Quod si a punctis N, Q rectæ ducantur NS, QR ipsi VX

parallelæ, junganturque KΓ, LΓ plano YX occurrentes in punctis S, R, eodem modo demonſtrabitur puncta S, R data eſſe. At vero recta FI producta concurrat cum VX in puncto



T. Producatur AF quouſque plano YX occurrat in puncto Π, jungaturque recta TΠ. Demonſtrabitur, ut in Propoſitione ſexta libri I., rectam TΠ poſitione datam eſſe, datumque angulum FTΠ. Itaque erit angulus FIA ſive æqualis angulo FTΠ, ſive eidem inæqualis. Sit primo æqualis; ducaturque a puncto E recta EM parallela ipſi TΠ, ideoque ipſi etiam AI. Si igitur recta jungatur IΓ plano YX occurrens in puncto M, erit id punctum in EM. Agatur modo per rectam FT, punctumque Γ planum ſectionem faciens in plano ΓZY rectam ΓΔ. Erit utique ΓΔ parallela ipſi FT, datumque punctum Δ. Hoc enim ita eſſe, in ſuperiore Propoſitione demonſtratum eſt. Itaque demonſtrabitur, ut ſupra, punctum M eſſe in recta ΔH poſitione data. Eſt autem hoc idem etiam in EM data itidem poſitione. Punctum igitur M eſt datum. Quod ſi a punctis O, P rectæ ducantur OS, PR ipſi TΠ parallelæ, junganturque KΓ, LΓ plano YX occurrentes in punctis S, R, eodem modo demonſtrabitur, puncta S, R data eſſe. At vero angulus FIA ſit inæqualis angulo FTΠ, puta



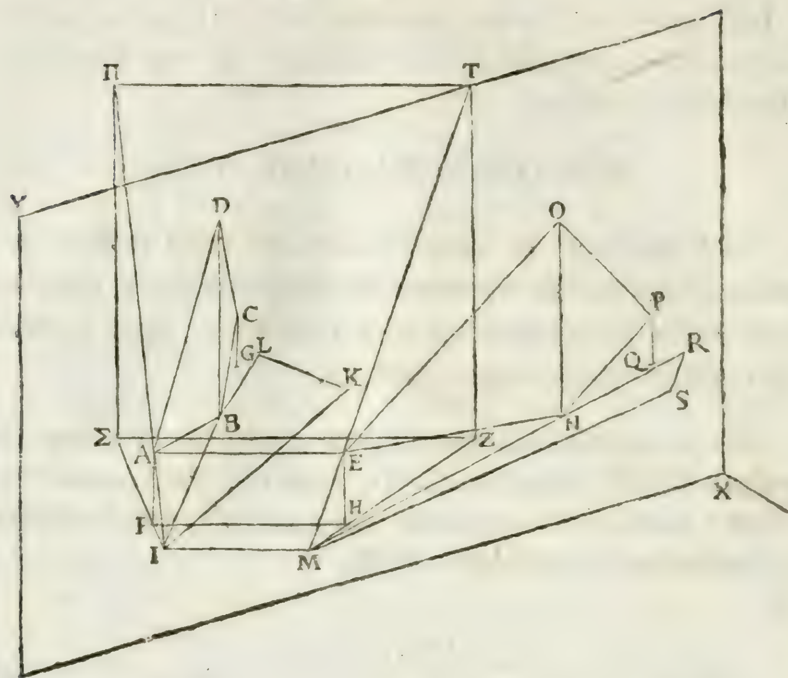
eodem major. Agatur per rectam FT punctumque Γ planum sectionem faciens in plano ΓZY rectam ΓΔ ipsi FT parallelam. Deinde vero per ΓΔ & ΓΘ subjecto plano perpendicularem planum aliud agatur sectionem faciens in subjecto plano rectam ΘΣ, & in YX rectam ΔΞ. Agatur denique per rectam AI punctumque Γ tertium planum sectionem faciens in plano ΔΘ rectam ΓΞ parallelam ipsi AI. Quoniam igitur datus est angulus ΔXΣ, erit utique datus etiam eidem æqualis ΓΔΞ. Datus est autem etiam
per 40. dat. angulus ΔΓΞ, utpote æqualis angulo TIA. Igitur triangulum ΓΔΞ specie datum est. Data est autem magnitudine recta ΓΔ.
per cor. 40. dat. Triangulum igitur ΓΔΞ specie & magnitudine datum est; ideo-
per 28. & 25. dat. que data magnitudine ΔΞ. Atqui data eadem est etiam positione, datumque unum ejus extremum Δ. Igitur & alterum Ξ est datum. Jam vero inventis punctis Δ & Ξ, demonstrabitur, ut in Propositione sexta, puncta M, S, R data esse. Itaque jungantur in tribus hisce figuris rectæ NM, MS, SR, RN: atque erit, per definitionem Propositionis undecimæ libri I., quæ oritur delineatio MNRS, scenographia concurrens procumbensque basis rectæ IBLK.

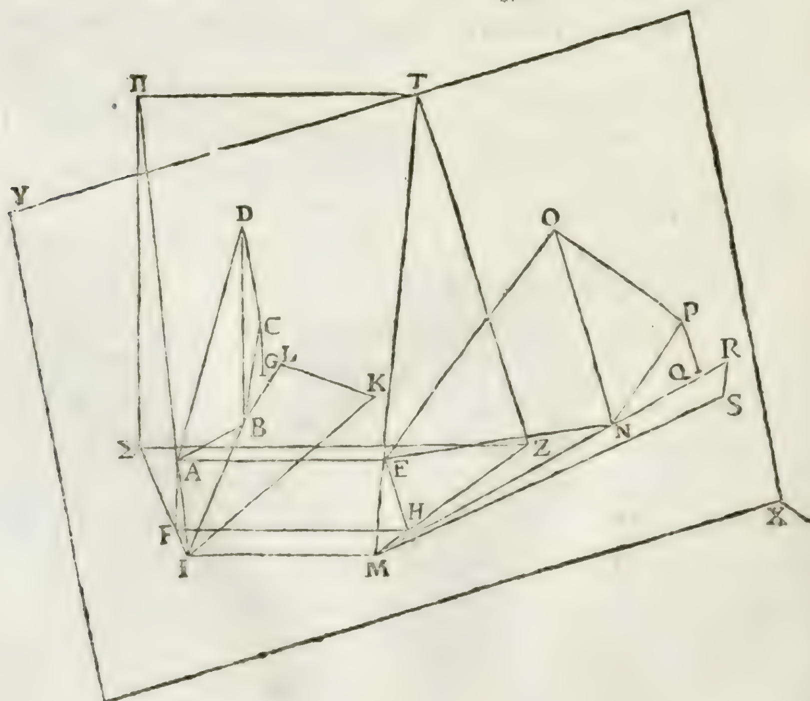
Data igitur positione & magnitudine basi recta umbræ parallelæ pyramidis triangularem basim habentis; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO VIII.

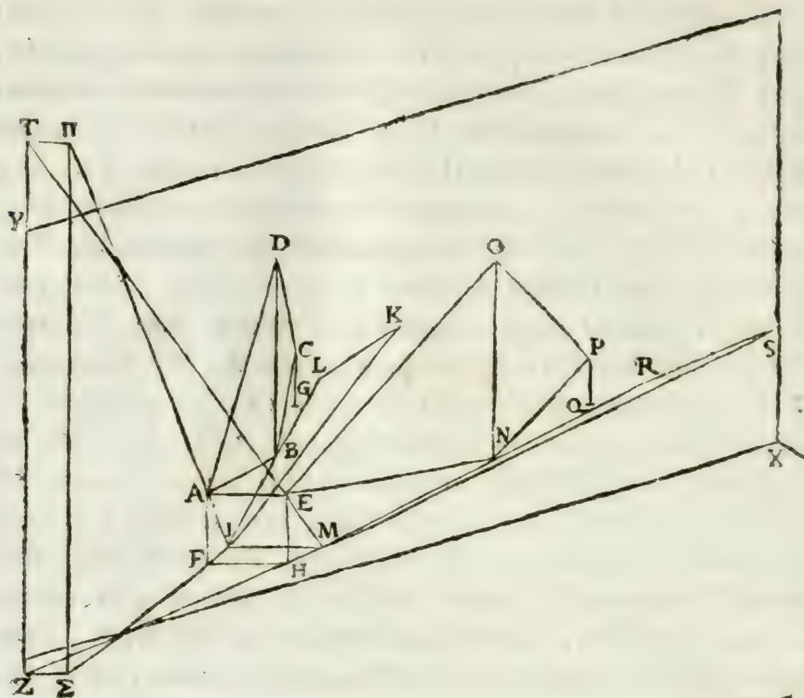
Data positione & magnitudine basi recta umbræ recedentis pyramidis triangularem basim habentis, ejusdem basis rectæ scenographiam tum parallelam, tum parallelam procumbentemque conficere.

Data sit positione & magnitudine basis recta IBLK umbræ recedentis IBLKП pyramidis ABCD, cujus basis ABC, vertex D. Oportet conficere scenographiam tum parallelam, tum parallelam procumbentemque basis rectæ IBLK.

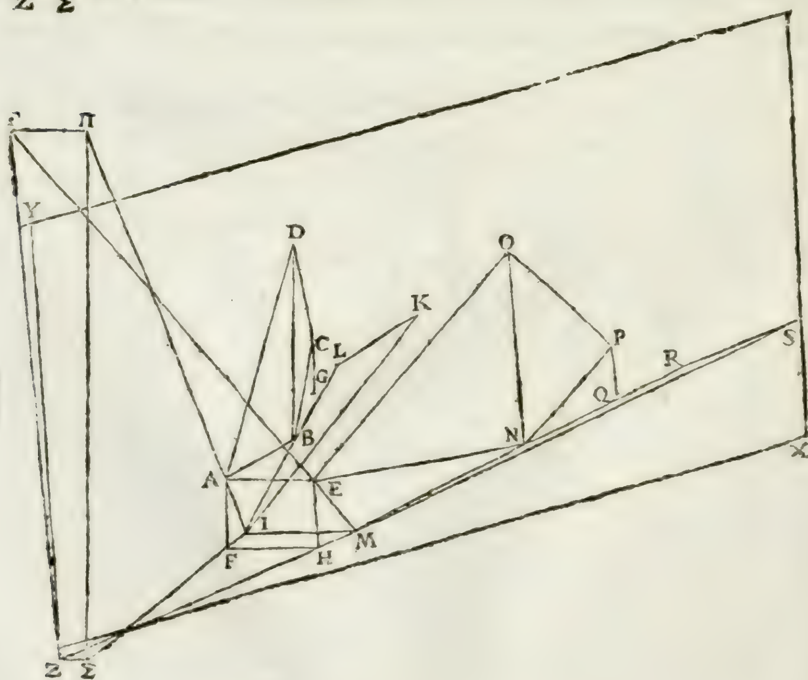

Π
T
Y
D
O
C
P
G
L
K
Q
R
S
B
Σ
A
E
Z
N
X
H
F
I
M


Π
T
Y
D
O
C
P
G
L
K
Q
R
S
B
Σ
A
E
Z
N
H
X
F
I
M

Sit delineatio ENPO ſcenographia ſive parallela, ſive parallela procumbenſque pyramidis ABCD: deſcriptaque ſint diagrammata, quæ iis conficiendis, baſique rectæ IBLK inveniendæ neceſſaria ſunt, ut in Propoſitionibus quarta & ſexta libri I., & ſecunda hujuſce. Ac recta quidem ΠΣ ſive erit ultra planum YX, ſive citra. Sit primo ultra planum YX: ducaturque a puncto Σ ad planum YX ipſi FH parallela recta ΣZ. Erit utique, per Propoſitiones, quas diximus, quartam & ſextam libri I., datum punctum Z. Ducatur modo a puncto I ad planum item YX recta IM parallela ipſi FH. Atque erunt puncta Z, H, M in plano ΣM. Sunt autem eadem etiam in plano YX. Igitur puncta Z, H, M ſunt in communi ſectione planorum ΣM, YX, ideoque in recta linea ZM. Eadem ratione, ducta ΠT ad planum YX ipſi FH parallela, demonſtrabitur datum eſſe punctum T, itemque eſſe in recta linea puncta T, E, M. Ex quo ſequitur punctum M datum eſſe, utpote quod in utraque eſt recta poſitione data ZM, TM. Eodem modo ductis a punctis K, L ad planum YX rectis KS, LR ipſi FH parallelis, data erunt puncta S, R. At vero recta ΠΣ cadat citra planum YX: ducantur-



T
Π
Y
D
O
K
C
L
G
P
R
S
Q
B
N
X
A
E
I
M
F
H
Z
Σ



Π
Y
D
O
K
C
L
G
P
R
S
Q
B
N
X
A
E
I
M
F
H
Z
Σ

que a punctis Σ, Π ad planum YX rectæ ΣZ, ΠT ipsi FH parallelæ. Erunt utique, ut infra demonstrabimus, puncta Z, T data. Quocirca eadem fiant, quæ supra; eodemque modo demonstrabitur data esse puncta M, S, R. Itaque jungantur in quatuor hisce figuris rectæ NM, MS, SR, RN: atque erit, per definitiones Propositionum quartæ & sextæ libri I., quæ oritur delineatio MNRS, scenographia sive parallela, sive parallela procumbensque basis rectæ IBLK.

Data igitur positione & magnitudine basi recta umbræ recedentis pyramidis triangularem basim habentis; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO IX.

Dato puncto aliquo citra planum subjecto plano perpendiculare, punctum in hoc plano invenire, in quod a dato recta linea incidit rectæ cuidam parallela, quæ cum communi planorum sectione in sublimi angulos facit.

Datum sit citra planum AB perpendiculare plano CD punctum aliquod G; angulosque in sublimi faciat, cum communi planorum AB, CD sectione CB, recta CE, cujus ad planum CD inclinatio sit angulus ECF. Oportet invenire in plano AB id punctum, in quod a G incidit recta linea parallela ipsi CE.

Sit primo punctum G in plano CD. Ducatur autem a G ipsi CF parallela recta GK ipsam CB secans in puncto H; ponaturque ab H recta HK ipsi HG æqualis. Erit igitur HK magnitudine data. Data est autem etiam positione, datumque unum ejus extremum H. Igitur & alterum K datum est. Ducatur modo a K ad planum AB, per Propositionem quartam libri I., recta KI parallela ipsi CE; datumque erit punctum I. Itaque juncta IH, eaque producta, ponatur ab H recta HM æqualis ipsi IH; jungaturque GM. Quoniam igitur triangula GHM, KHI habent latera GH, HM æqualia lateribus KH, HI, alterum alteri, angulumque GHM æqualem angulo KHI, ideo angulus HMG æqualis est angulo HIK: ac propterea GM ipsi KI, sive CE, est parallela. Quoniam vero HM æqualis est ipsi HI, demonstrabitur, ut supra, punctum M datum esse. Inventum est igitur in plano AB id punctum, in quod a G incidit recta linea ipsi CE parallela. At vero punctum G sit in sublimi: ducaturque ab eodem plano CD perpendicularis recta GG. Erit utique datum punctum G. Itaque eadem fiant, quæ supra; in-

per 26. dat. per 28. & 25. dat. per 27. dat.

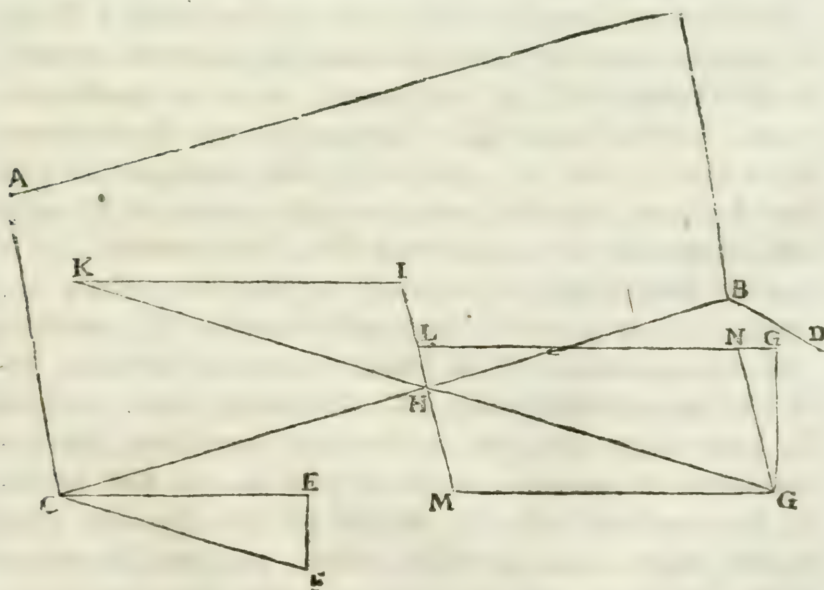
ventoque puncto M, ducatur a G ipsi GM parallela recta GL. Erit utique LM ipsi GG æqualis. Ex quo sequitur punctum L inventum esse.

Dato igitur puncto aliquo citra planum subjecto plano perpendiculare; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO X.

Dato puncto aliquo citra planum ad subjectum planum inclinatum, punctum in hoc plano invenire, in quod a dato recta linea incidit rectæ cuidam parallela, quæ cum communi planorum sectione in sublimi angulos facit.

Datum sit citra planum AB inclinatum ad planum CD punctum aliquod G; angulosque in sublimi faciat, cum communi



planorum AB, CD sectione CB, recta CE, cujus ad planum CD inclinatio sit angulus ECF. Oportet invenire in plano AB id punctum, in quod a dato incidit recta linea parallela ipsi CE.

Sit primo punctum G in plano CD. Ducatur autem a G ipsi CF parallela recta GK ipsam CB secans in puncto H, ponaturque ab H recta HK ipsi GH æqualis. Atque erit punctum K datum. Ducatur modo a K ad planum AB, per Propositionem sextam libri I., recta KI parallela ipsi CE; datumque erit punctum I. Itaque juncta IH, eaque producta, ponatur ab H recta HM æqualis ipsi IH, jungaturque GM. Demonstrabitur, ut in superiore Propositione, inventum esse in plano AB punctum M, nempe illud, in quod a G incidit recta linea ipsi CE parallela.

At vero punctum G sit in sublimi: ducaturque ab eodem plano CD perpendicularis recta GG. Erit utique datum punctum G. Itaque eadem fiant, quæ in superiore Propositione; inventoque puncto M, ducatur a puncto G recta GL ipsi GM parallela, & a puncto G recta GN parallela ipsi LM. Quoniam igitur

per 4. dat. uterque angulus datus est GGM, NGM, datus erit & reliquus GGN. Datus est autem etiam angulus GNG. Igitur triangulum

per 40. dat. GNG specie datum est. At vero data est magnitudine recta GG.

per cor. 40. dat. Triangulum igitur GNG specie & magnitudine est datum; ideoque data est magnitudine recta GN, & quæ eidem æqualis est,

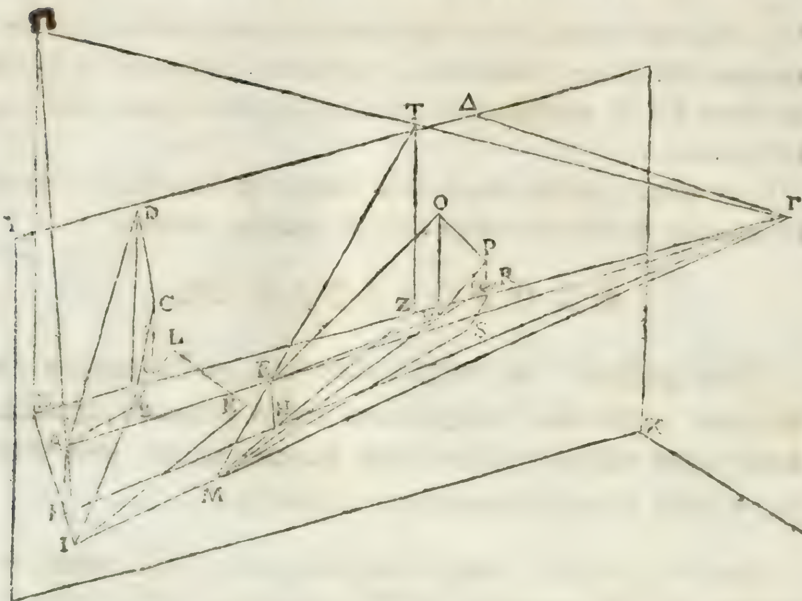
LM. Data eſt autem LM & poſitione, datumque unum ejus extremum M. Igitur & alterum L eſt datum. Inventum eſt igitur in plano AB id punctum, in quod a G incidit recta linea ipſi CE parallela. per 27. dat.

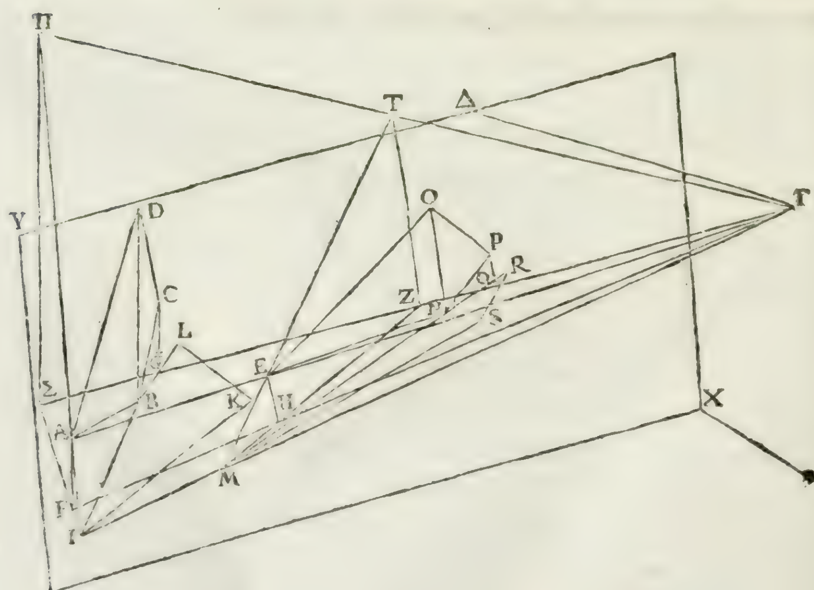
Dato igitur puncto aliquo citra planum ad ſubjectum planum inclinatum; & quæ ſequuntur. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XI.

Data poſitione & magnitudine baſi recta umbræ recedentis pyramidis triangularem baſim habentis, ejuſdem baſis rectæ ſcenographiam tum concurrentem, tum concurrentem procumbentemque conficere.

Data ſit poſitione & magnitudine baſis recta IBLK umbræ recedentis IBLKΠ pyramidis ABCD, cujus baſis ABC, vertex D. Oportet conficere ſcenographiam tum concurrentem, tum concurrentem procumbentemque baſis rectæ IBLK.

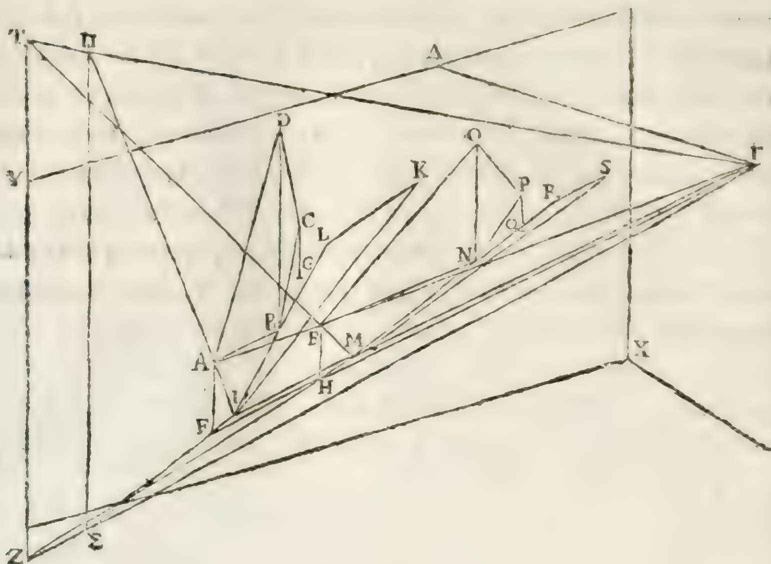


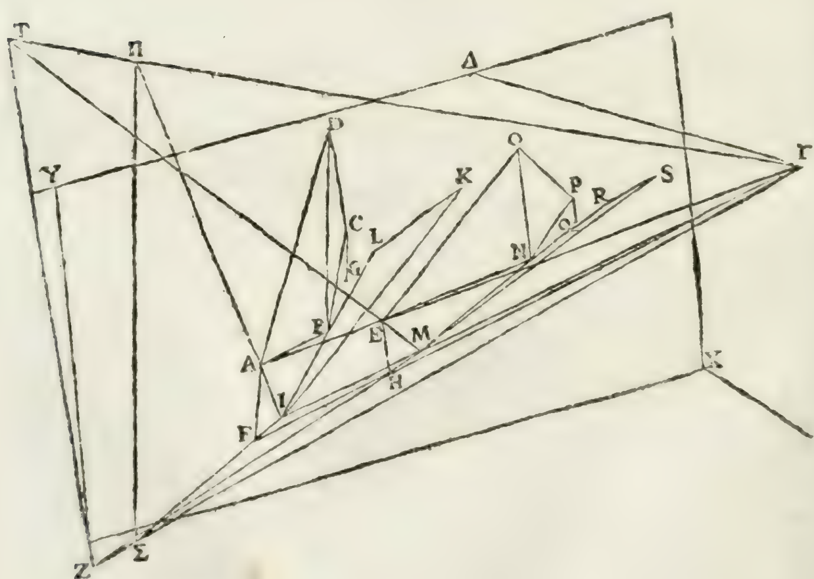


Sit delineatio ENPO scenographia sive concurrens, sive con-

currens

currens procumbensque pyramidis ABCD: descriptaque sint diagrammata, quæ iis conficiendis, basique rectæ IBLK inveniendæ necessaria sunt, ut in Propositionibus septima & undecima libri I., & secunda hujusce. Ac recta quidem ΠΣ sive erit ultra planum YX, sive citra. Sit primo ultra planum YX: ducanturque a punctis Σ, Π ad Γ rectæ ΣΓ, ΠΓ plano YX occurrentes in punctis Z, T. Erunt utique, per Propositiones, quas diximus, septimam & undecimam libri I. data puncta Z, T. Itaque si jungantur rectæ IΓ, KΓ, LΓ plano YX occurrentes in punctis M, S, R, demonstrabitur, ut in Propositione octava, puncta M, S, R data esse. At vero recta ΠΣ cadat citra planum YX: ducanturque a punctis Σ, Π ad Γ rectæ ΣΓ, ΠΓ, quæ productæ ad





partes Z, T plano YX occurrant in punctis Z, T. Erunt utique, ut infra demonstrabimus, puncta Z, T data. Quocirca si

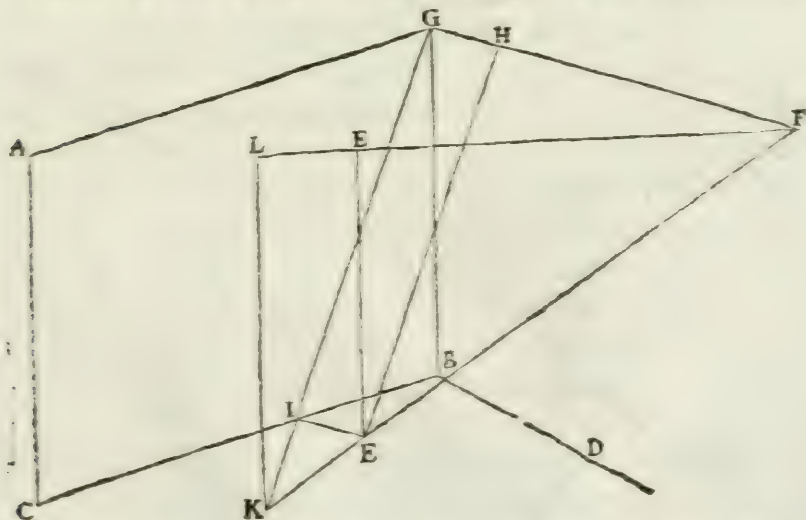
eadem fiant, quæ supra, eodem modo demonstrabitur data esse puncta M, S, R. Itaque jungantur in quatuor hisce figuris rectæ NM, MS, SR, RN: atque erit, per definitiones Propositionum septimæ & undecimæ libri I., quæ oritur delineatio MNRS, scenographia sive concurrens, sive concurrens procumbensque basis rectæ IBLK.

Data igitur positione & magnitudine basi recta umbræ recedentis pyramidis triangularem basim habentis; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

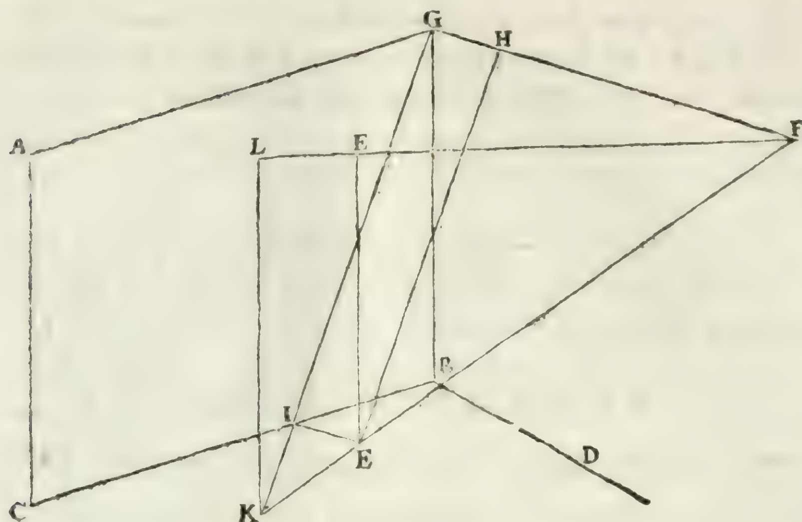
PROPOSITIO XII.

Dato puncto aliquo citra planum ad subjectum planum perpendiculare, punctum in hoc plano invenire, in quod recta linea incidit, quæ per punctum datum, aliudque item datum in sublimi, & ad easdem partes, ducitur.

Datum sit citra planum AB perpendiculare plano CD punctum



aliquod E, datumque item sit in sublimi punctum aliud F. Oportet invenire in plano AB id punctum, in quod incidit recta linea, quæ ducitur per duo puncta F, E.



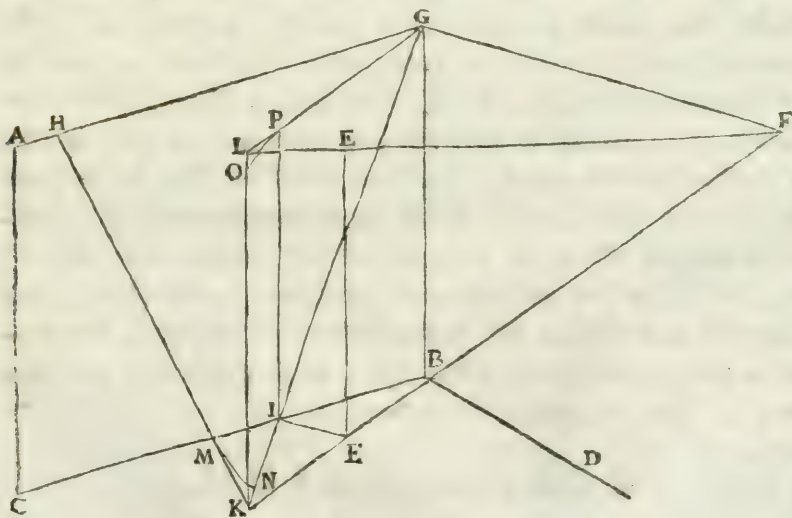
Sit primo punctum E in plano CD. Ducantur autem a punctis F, E ad planum AB rectæ lineæ FG, EI ſibi invicem parallelæ. Hoc autem quomodo fiat, in Propoſitione ſeptima libri I. demonſtratum eſt. Atque erunt puncta G, I data. Ducantur modo per puncta F, E, & G, I rectæ FE, GI ſibi invicem occurrentes in puncto K; & per punctum E recta EH ipſi GI parallela. Quoniam igitur triangula FHE, EIK ſunt æquiangula, ideo ut FH ad HE, ita ſe habet EI ad IK. At vero ratio, quam
per. 26. 4. & 1. dat. FH habet ad HE, eſt data. Igitur & ratio data eſt, quam EI
per 2. dat. habet ad IK. Data eſt autem magnitudine EI. Data eſt igitur
per 26. & 29. dat. magnitudine & IK. Atqui data eadem eſt & poſitione, datumque
per 27. dat. unum ejus extremum I. Igitur & alterum K eſt datum. Inventum eſt igitur in plano AB id punctum, in quod incidit recta linea, quæ ducitur per puncta F, E. At vero punctum E ſit in ſublimi: ducaturque ab eodem, plano CD perpendicularis, recta EE. Erit utique datum punctum E. Itaque eadem fiant, quæ ſupra; inventoque puncto K, ducatur ab eodem recta KL parallela ipſi EE; jungaturque FE ipſi KL occurrens in puncto L. Quoniam igitur triangula FEE, FKL ſunt æquiangula, datæque ſunt magnitudine rectæ FE, EE, FK, demonſtrabitur, ut ſupra, punctum L datum eſſe. Inventum eſt igitur in plano AB id pun-

ctum, in quod incidit recta linea, quæ ducitur per puncta F, E. Dato igitur puncto aliquo citra planum subjecto plano perpendiculare; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII.

Si in figura superioris Propositionis sumatur in IC, communi planorum AB, CD sectione, recta IM ipsi IE æqualis, & in GA recta GH æqualis rectæ FG, jungaturque recta HM, ea per punctum K transibit. Item si a puncto I ducatur recta IP ipsi EE æqualis & parallela, jungaturque recta GP, ea transibit per punctum L.

Si enim recta HM per punctum K non transit, ea secet, ut in apposita figura, rectam GK in puncto N. Erunt utique trian-



gula GHN, IMN æquiangula. Ut igitur GH ad IM, ita se habet GN ad NI. At vero GH ad IM ita se habet, ut FG ad EI; quoniam GH æqualis est ipsi FG, & IM æqualis ipsi IE; itemque FG ad EI, ut GK ad KI. Igitur GN ad NI ita se habet, ut GK ad KI. Et dividendo, GI ad NI ita se habet, ut

GI ad KI; ideoque NI æqualis eſt ipſi KI, minor majori; quod fieri non poteſt. Non igitur recta HM ſecat rectam GK in puncto N. Sed neque in alio quovis puncto, præterquam in K. Igitur recta HM tranſit per punctum K. Jam vero neque recta GP tranſeat per punctum L, ſed ſecet rectam KL in puncto aliquo O. Quoniam igitur KO, IP ſunt parallelæ, ut GK ad GI, ita ſe habebit KO ad IP. Ut autem GK ad GI, ita ſe habet etiam FK ad FE, ſive KL ad IP utpote æqualem ipſi EE. Igitur ut KO ad IP, ita ſe habet KL ad IP; ideoque KO æqualis eſt ipſi KL, minor majori; quod fieri non poteſt. Non igitur recta GP ſecat rectam KL in puncto O. Sed neque in alio quovis puncto, præterquam in L. Igitur recta GP tranſit per punctum L. Quod oportebat demonſtrare.

COROLLARIUM.

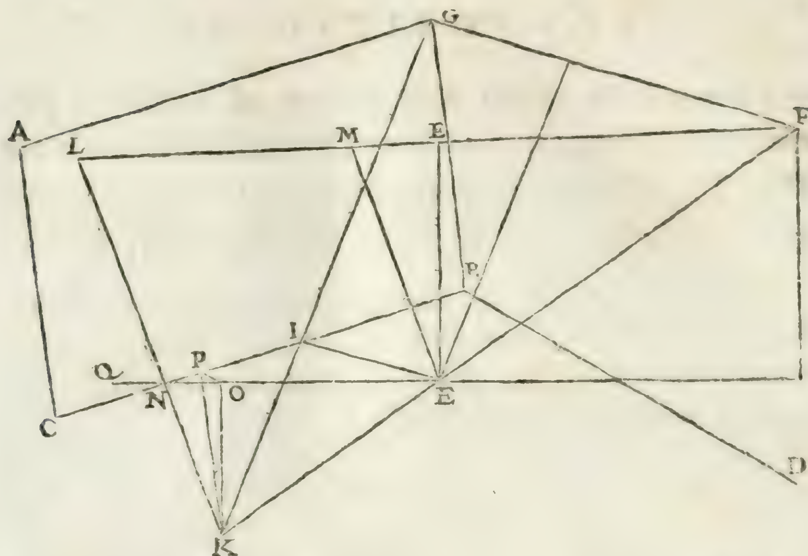
Ex hoc manifeſtum eſt, in duodecima Propoſitione puncta K, L aliter inveniri poſſe, atque in illa inventa ſunt.

PROPOSITIO XIV.

Dato puncto aliquo citra planum ad subjectum planum inclinatum, punctum in hoc plano invenire, in quod recta linea incidit, quæ per punctum datum, aliudque item datum in sublimi, & ad easdem partes, ducitur.

Datum sit citra planum AB inclinatum ad planum CD punctum aliquod E, datumque item sit in sublimi punctum aliud F. Oportet invenire in plano AB id punctum, in quod incidit recta linea, quæ ducitur per duo puncta F, E.

Sit primo punctum E in plano CD. Ducantur autem a punctis F, E ad planum AB rectæ lineæ FG, EI sibi invicem parallelæ. Hoc autem quomodo fiat, in Propositione undecima libri I. demonstratum est. Atque erunt puncta G, I data. Itaque eadem fiant, quæ in Propositione duodecima: punctumque K haud secus invenietur, atque in illa inventum sit. At vero punctum E sit in sublimi: ducaturque ab eodem plano CD perpendicularis recta EE. Erit utique datum punctum E. Itaque invento, ut



ſupra, puncto K, agatur per rectas EE, FK planum ſectionem faciens in plano CD rectam EQ, & in plano AB rectam KL. Atque erit EQ, ideoque & KL poſitione data. Ducatur a puncto K recta KO ipſi EE parallela, & KP perpendicularis ipſi CB; jungaturque OP. Demonſtrabitur, ut alibi ſæpius, angulum OPK eſſe planorum AB, CD inclinationem, ideoque datum: ex quo colligitur datum eſſe etiam angulum ONK, ſive eidem æqualem QNL. Jungatur modo recta FE ipſi KL occurrens in puncto L; ducaturque a puncto E, quod eſt in plano CD, recta EM parallela ipſi KL. Quoniam igitur triangulum FEE ſpecie datum eſt; quippe data eſt unaquæque rectarum FE, EE, FE; datus utique erit angulus FEE, ideoque & qui deinceps eſt poſitus, MEE. Datus eſt autem etiam angulus EEM, utpote qui reliquus eſt ex duobus NEE, NEM, quorum uterque eſt datus. Igitur triangulum EEM ſpecie datum eſt. At vero data eſt magnitudine recta EE. Triangulum igitur EME ſpecie & magnitudine eſt datum; ideoque data eſt magnitudine recta ME. Quoniam igitur triangula FEM, FKL ſunt æquiangula, ideo ut FE ad EM, ita ſe habet FK ad KL. At vero ratio, quam habet FE ad EM, eſt data. Igitur & ratio data eſt, quam FK habet ad KL.

per 25. & 26. dat.

per 1. & 42 dat.

per 26. dat.

per 4. dat.

per cor. 40. dat.

per 1. dat.

KL. Data eſt autem magnitudine FK. Data eſt igitur magnitudine & KL. Atqui data eadem eſt & poſitione, datumque unum ejus extremum K. Igitur & alterum L eſt datum. Inventum eſt igitur in plano AB id punctum, in quod incidit recta linea, quæ ducitur per puncta F, E. per 2. dat. per 27. dat.

Dato igitur puncto aliquo citra planum ad ſubjectum planum inclinatum; & quæ ſequuntur. Quod oportebat facere.

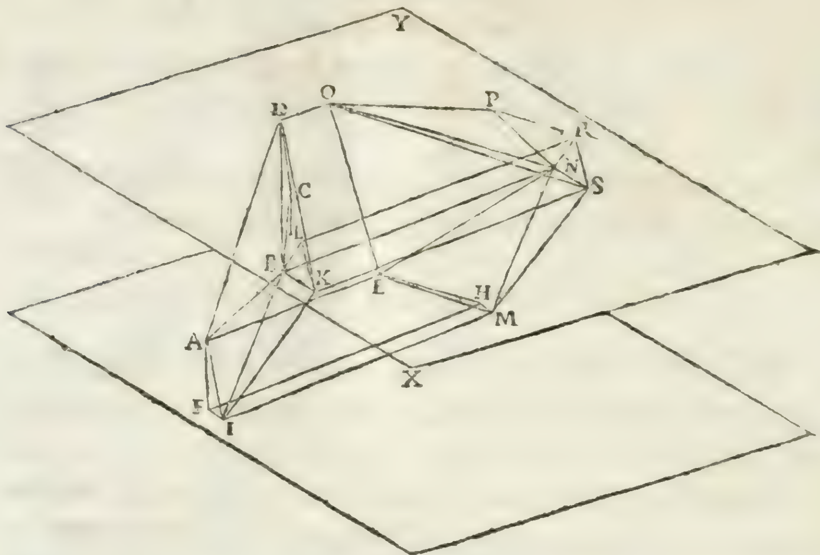
COROLLARIUM.

Illud vero manifeſtum eſt, puncta K, L haud ſecus in hac Propoſitione inveniri poſſe, atque in duodecima per Propoſitionem decimam tertiam inventa ſint; ſi, ad punctum L quod attinet, recta KL a puncto K ita ducatur, ut ea communis ſit planorum AB, FKL ſectio.

PROPOSITIO XV.

Data poſitione & magnitudine baſi recta umbræ parallelæ pyramidis triangularem baſim habentis, ejuſdem baſis rectæ ſcenographiam parallelam horizontalem conficere.

Data ſit poſitione & magnitudine baſis recta IBLK umbræ parallelæ ABCDKLBI pyramidis ABCD, cujus baſis ABC, vertex D. Oportet conficere ſcenographiam parallelam horizontalem baſis rectæ IBLK.



Sit delineatio ENPO ſcenographia parallela horizontalis pyramidis ABCD: deſcriptaque ſint diagrammata, quæ illi conficiendæ, baſique rectæ IBLK inveniendæ neceſſaria ſunt, ut in Propoſitionibus decima quinta libri I., & prima hujuſce. Ducantur autem a punctis I, K, L rectæ ipſi FH parallelæ plano YX occurrentes in punctis M, S, R: eruntque, per Propoſitionem, quam diximus, decimam quintam libri I., puncta M, S, R data. Itaque jungantur rectæ NM, MS, SR, RN: atque erit, per definitionem Propoſitionis decimæ quintæ libri I., quæ oritur delineatio MNRS, ſcenographia parallela horizontalis baſis rectæ IBLK.

Data igitur poſitione & magnitudine baſi recta umbræ parallelæ pyramidis triangularem baſim habentis; & quæ ſequuntur. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM I.

Quoniam duo plana parallela IH, KN; FE, BO; IE, KO ſecantur a plano YX, erunt utique parallelæ inter ſe invicem communes ipſorum ſectiones. Ex quo illud ſequitur, quod in Corollario Propoſitionis quintæ collectum eſt, invento puncto quolibet M delineationis MNRS, reliqua S, R, & ſiqua ſunt alia, facillime inventum iri.

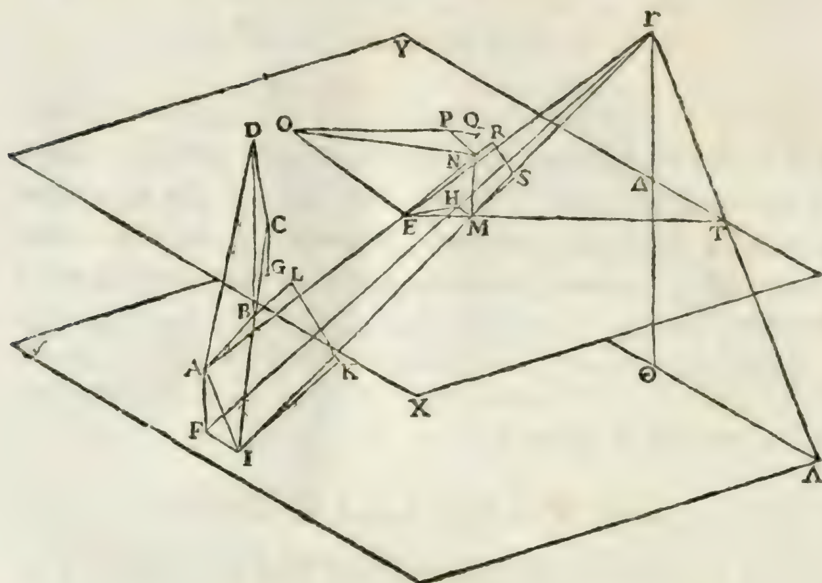
COROLLARIUM II.

Et quoniam in Corollario tertio Propoſitionis decimæ quintæ libri I. demonſtratum eſt, eam delineationem in ſubjecto plano poſſe repræſentari, quæ in parallelo conficienda erat, conſtat id quoque verum eſſe de delineatione MNRS.

PROPOSITIO XVI.

Data poſitione & magnitudine baſi recta umbræ parallelæ pyramidis triangularem baſim habentis, ejuſdem baſis rectæ ſcenographiam concurrentem horizontalem conficere.

Data ſit poſitione & magnitudine baſis recta IBLK umbræ parallelæ ABCDKLBI pyramidis ABCD, cujus baſis ABC, vertex D. Oportet conficere ſcenographiam concurrentem horizontalem baſis rectæ IBLK.



Sit delineatio ENPO ſcenographia concurrens horizontalis pyramidis ABCD: deſcriptaque ſint diagrammata, quæ illi conficiendæ, baſique rectæ IBLK inveniendæ neceſſaria ſunt, ut in Propoſitionibus decima ſexta lib. I., & prima hujuſce. Ducatur a puncto Θ, in quod incidit ΓΘ plano VΛ perpendicularis, recta ΘΛ parallela ipſi FI: deinde vero agantur duo plana, alterum quidem per ΓΘ, ΘΛ ſectionem in plano YX faciens rectam ΔT, alterum vero per AI, punctumque Γ ſectionem faciens in plano ΓΘΛ rectam ΓΛ. Atque erunt triangula AFI, ΓΘΛ, ΓΔT æquiangula. Igitur ut AF ad FI, ita ſe habet ΓΘ ad ΘΛ, ſive ΓΔ ad

per 1. dat. ΔT. At vero ratio, quam habet AF ad FI, eſt data. Igitur & ratio data eſt, quam ΓΔ habet ad ΔT. Data eſt autem magnitu-

per 2. dat. dine ΓΔ. Data eſt igitur magnitudine & ΔT. Atqui data eadem

per 28. dat. eſt & poſitione, datumque unum ejus extremum Δ. Igitur &

per 27. dat. alterum T eſt datum. Jungatur modo recta IΓ plano YX occurrens in puncto M. Quoniam igitur duo plana parallela YX, VΛ ſecantur a plano FIΓ, erunt utique communes ipſorum ſectiones HM, FI inter ſe invicem parallelæ. Quare punctum M erit in

recta HM positione data. Et quoniam parallelæ sunt rectæ ΓT, AI, demonstrabitur, ut in Propositione sexta, punctum M esse in recta ET data item positione. Punctum igitur M erit datum. Jungantur modo rectæ KΓ, LΓ plano YX occurrentes in punctis S, R. Eodem modo demonstrabitur puncta S, R data esse. Itaque jungantur rectæ NM, MS, SR, RN: atque erit, per definitionem Propositionis decimæ sextæ libri I., quæ oritur delineatio MNRS, scenographia concurrens horizontalis basis rectæ IBLK.

per 28. dat.

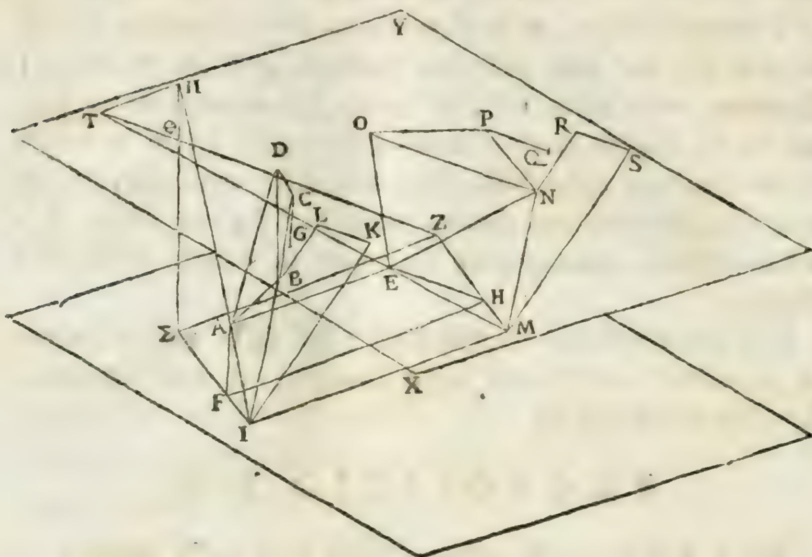
per 25. dat.

Data igitur positione & magnitudine basi recta umbræ parallelæ pyramidis triangularem basim habentis; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XVII.

Data positione & magnitudine basi recta umbræ recedentis pyramidis triangularem basim habentis, ejusdem basis rectæ scenographiam parallelam horizontalem conficere.

Data sit positione & magnitudine basis recta IBLK umbræ recedentis IBLKΠ pyramidis ABCD, cujus basis ABC, vertex D. Oportet conficere scenographiam parallelam horizontalem basis rectæ IBLK.



Sit delineatio ENPO ſcenographia parallela horizontalis pyramidis ABCD: deſcriptaque ſint diagrammata, quæ illi conficiendæ, baſique rectæ IBLK inveniendæ neceſſaria ſunt, ut in Propoſitionibus decima quinta libri I., & ſecunda hujuſce. Ducatur a puncto Σ ad planum YX ipſi FH parallela recta ΣZ. Erit utique, per Propoſitionem, quam diximus, decimam quintam libri I., datum punctum Z. Jungatur a puncto Θ, in quo ΣΠ occurrit plano YX, recta ΘZ; eademque producta, fiat, ut ΣΘ ad ΘZ, ita ΠΘ ad ΘT; jungaturque ΠT. Erunt igitur triangula ΘΣZ, ΘΠT æquiangula, angulusque ΣZΘ æqualis angulo ΠTΘ: ac propterea ΠT parallela ipſi ΣZ. Quoniam vero ΠΘ ad ΘT datam habet
per 2. dat. rationem, eademque magnitudine data eſt, ideo data erit magni-
per 26. dat. tudine etiam ΘT. Atqui data eadem eſt & poſitione, datumque
per 27. dat. unum ejus extremum Θ. Igitur & alterum T eſt datum. Ducatur modo a puncto I recta IM parallela ipſi FH. Demonſtrabitur, ut in Propoſitione octava, puncta quidem Z, H, M eſſe in recta linea ZM, puncta vero T, E, M eſſe in recta linea TM. Ex quo ſequitur punctum M eſſe datum. Eodem modo du-

ctis a punctis K, L ad planum YX rectis KS, LR ipsi FH parallelis, data erunt puncta S, R. Itaque jungantur rectæ NM, MS, SR, RN: atque erit, per definitionem Propositionis decimæ quintæ libri I., quæ oritur delineatio MNRS, scenographia parallela horizontalis basis rectæ IBLK.

Data igitur positione & magnitudine basi recta umbræ recedentis pyramidis triangularem basim habentis; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

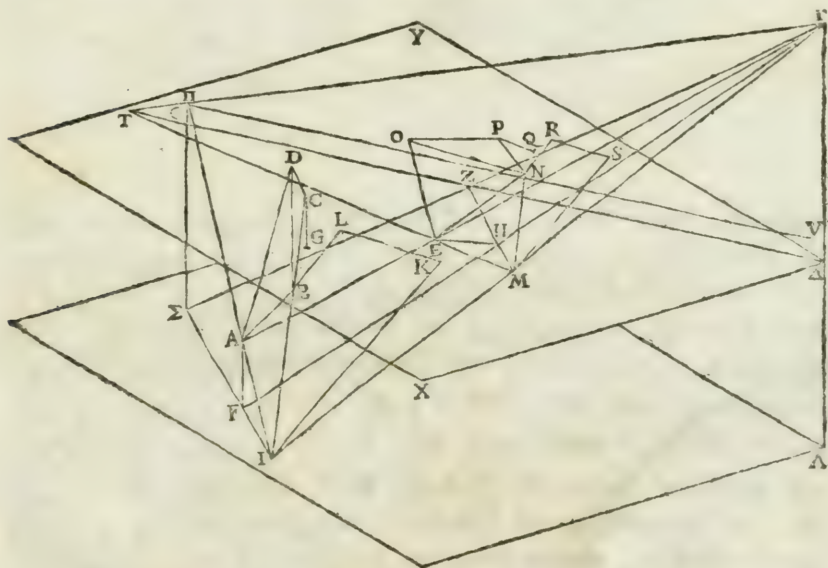
PROPOSITIO XVIII.

Data positione & magnitudine basi recta umbræ recedentis pyramidis triangularem basim habentis, ejusdem basis rectæ scenographiam concurrentem horizontalem conficere.

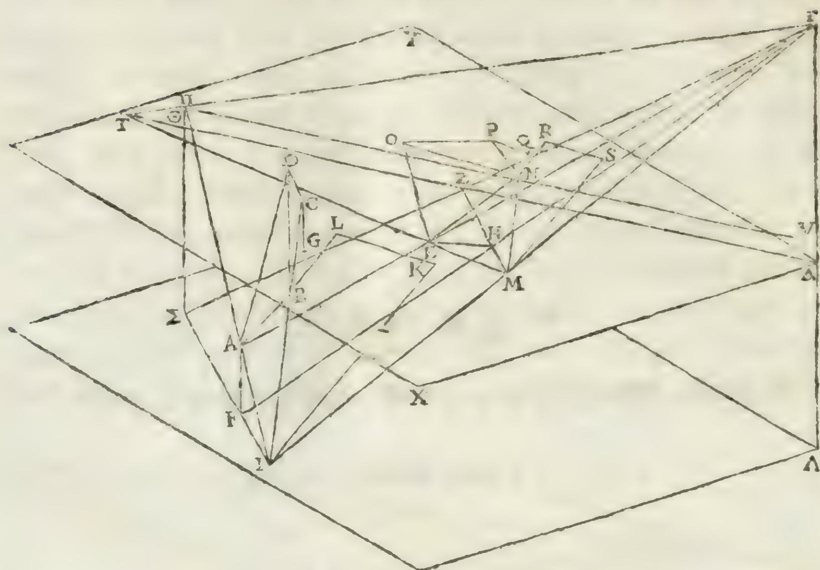
Data sit positione & magnitudine basis recta IBLK umbræ recedentis IBLKΠ pyramidis ABCD, cujus basis ABC, vertex D. Oportet conficere scenographiam concurrentem horizontalem basis rectæ IBLK.

Sit delineatio ENPO ſcenographia concurrens horizontalis pyramidis ABCD: deſcriptaque ſint diagrammata, quæ illi conficiendæ, baſique rectæ IBLK inveniendæ neceſſaria ſunt, ut in Propoſitionibus decima ſexta libri I., & ſecunda hujuſce. Ac recta quidem ΣΠ ſive æqualis erit ipſi ΓΛ, ſive eidem inæqualis. Sit primo æqualis. Jungatur recta ΣΓ plano YX occurrens in puncto Z. Erit utique, per Propoſitionem, quam diximus, decimam ſextam libri I., datum punctum Z. Jungatur recta ΓΠ, ducaturque ΔZ, eademque producatur ad Θ. Atque erit ΘΠ æqualis ipſi ΓΔ. Eſt autem ΘΠ ipſi ΓΔ etiam parallela. Igitur recta ΔΘ parallela eſt ipſi ΓΠ. Ducatur modo a puncto Θ in plano YX recta ΘΞ ad rectos angulos ipſi ΘΔ; deinde vero recta jungatur IΓ plano YX occurrens in puncto M; jungaturque EM, quæ producatur ad Ξ. Quoniam igitur ΔΘ cum ΠΘ, ΘΞ, quæ in puncto Θ ſe ſe invicem ſecant, rectos angulos facit, ea utique plano, quod per ipſas agitur, ad rectos angulos erit. At vero

ΓΠ ipsi ΔΘ est parallela. Igitur & ΓΠ eidem plano erit ad rectos angulos; ideoque plana tum YX, quod per ipsam agitur ΔΘ, tum ΠΙΓ, si producatur, quod per ipsam agitur ΓΠ, plano ΞΘΠ ad rectos etiam angulos erunt. Secant autem eadem hæc se se invicem. Igitur & communis ipsorum sectio ΞM plano ΞΘΠ erit ad rectos angulos; ac proinde parallela ipsi ΔΘ. Quare recta EM positione data erit. Demonstrabitur, ut in Propo- per 28. dat.
sitione undecima, puncta Z, H, M esse in recta linea ZM data item positione. Punctum igitur M est datum. Jungantur modo rectæ KΓ, LΓ plano YX occurrentes in punctis S, R. Eodem modo demonstrabitur, puncta S, R data esse. At vero



recta ΣΠ sit inæqualis ipsi ΓΛ. Invento, ut supra, puncto Z jungantur rectæ ΔZ, ΓΠ, eædemque producantur, quousque simul concurrant in puncto T; & ducatur a puncto Π recta ΠV ipsi ΔΘ parallela. Erunt igitur triangula ΓVΠ, ΠΘT æquiangula; ideoque data erit ratio, quam ΠΘ habet ad ΘT. Data est autem magnitudine ΠΘ. Data est igitur magnitudine etiam ΘT. per 2. dat.
Atqui data eadem est & positione, datumque unum ejus extre- per 26. dat.



per 27. dat. mum Θ. Igitur & alterum T eſt datum. Jungatur modo recta IΓ plano YX occurrens in puncto M. Itidem demonſtrabitur, ut in Propoſitione undecima, puncta quidem Z, H, M eſſe in recta linea ZM; puncta vero T, E, M eſſe in recta linea TM. Ex quo ſequitur punctum M eſſe datum. Eodem modo junctis a punctis K, L rectis KΓ, LΓ plano YX occurrentibus in punctis S, R, hæc puncta erunt data. Itaque jungantur tam in prima, quam in ſecunda figura rectæ NM, MS, SR, RN: atque erit, per definitionem Propoſitionis decimæ ſextæ libri I., quæ oritur delineatio MNRS, ſcenographia concurrens horizontalis baſis rectæ IBLK.

Data igitur poſitione & magnitudine baſi recta umbræ recedentis pyramidis triangularem baſim habentis; & quæ ſequuntur. Quod oportebat facere.

FINIS
LIBRI SECUNDI.

VERONÆ

Typis HEREDUM MARCI MORONI

IDIB. MART. MDCCLXXXVIII.





